



Faculteit FEW 1e Deeltentamen Inleiding Algebra
(I Wisk.)
Vrije Universiteit 25-10-2002

Maak de opgaven 1 en 2 geheel, en van 3 de onderdelen c. en e.
U kunt bonuspunten verwerven door een (en precies een) van de andere onderdelen van opgave 3 te maken.
(U mag daarbij verwijzen naar andere onderdelen, lees deze dus goed door).
Dit tentamen zal in zijn geheel in een van de lessen besproken worden.

1

- a. (Hfdst 1, opg 12) Bepaal, in zover bestaande, de inverse restklasse van 37 modulo 673.
- b. Geef voor de priemrestklassen modulo 9 de vermenigvuldigings tabel.
- c. (Hfdst 2, opg3b.) Bepaal alle gehele getallen x , die voldoen aan het stelsel vergelijkingen $x \equiv 7 \pmod{25}$, (1) en $x \equiv 3 \pmod{8}$, (2).
- d. Zij $(G, *)$ een abelse groep. We noteren het neutrale element van G als e en de inverse van $g \in G$ als g^{-1} . Bewijs: $\forall a, b \in G : (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$. Schrijf tevens deze formule in de multiplicatieve - en additieve notatie.
- e. U weet, dat de $\phi(m)$, (samen met $\phi(1) = 1$) de orde van de groep der priemrestklassen modulo m geeft. Welke zijn de formules, die U in staat stellen $\phi(m)$ voor elke $m \geq 1$, ($m \in \mathbb{N}$) direct uit de priemfactorontbinding van de natuurlijke getallen te berekenen?

2

- a. Geef de definitie van de volgende begrippen:
 - De relatie R is een *equivalentierelatie* op de verzameling V en
 - $\bar{v}$ is de *equivalentieklasse* van $v \in V$ (bij de relatie R).
 - Definieer $\mathbb{Z}[X]$, de *polynoom ring in X met gehele coëfficiënten*.
 - De *orde* van een element g in een groep $(G, \cdot)$.
 - $f : (G, +) \rightarrow (H, \cdot)$ is een *homorfisme* van groepen.
 - Hoe definieer je voor $n \in \mathbb{N}$ de *symmetrische groep* ofwel de permutatie groep S_n ?

- b. Laat zien, dat in een eindige groep elk element ook werkelijk een (eindige) orde heeft.

Hint Zij $(G, \cdot)$ de groep en $g \in G$. Bekijk de verzameling $\{g^m | m \in \mathbb{Z}\}$

- c. Formuleer de stelling van het *delingsalgorithme* voor gehele getallen a, b met $b \neq 0$.

3

Zij $(G, \cdot)$ een abelse groep, (dus de operatie op G is vermenigvuldiging). Laat e_G het neutrale element van G zijn. Verder is $\emptyset \neq H \subset G$, (dus: H is een niet lege deelverzameling van G). Er is gegeven, dat H met dezelfde operatie als die er in G is, (dus vermenigvuldiging), een groep is, kort $(H, \cdot)$ is een groep. Laat e_H het neutrale element van de groep H zijn.

- a. Laat zien: de neutrale elementen van G en H zijn dezelfde.
- b. Laat $h \in H$ een element van H zijn. Daar H een groep is, heeft h een inverse h' in H . Daar G een groep is en $H \subset G$, heeft h een inverse h'' in G . Bewijs dat $h' = h''$.
- c. Definieer nu op G de relatie R door

$$u, v \in G : uLv \Leftrightarrow u^{-1}v \in H.$$

Bewijs, dat L een equivalentierelatie is.

- d. Even iets anders: als $A \subset G$ en $B \subset G$ deelverzamelingen zijn, dan stellen we per definitie: AB is de deelverzameling van G van alle elementen g van G , die in de vorm $g = ab$ te schrijven zijn met $a \in A$ en $b \in B$. In formule

$$AB = \{ab \in G | a \in A, b \in B\}.$$

Bewijs voor $C \subset G$ de formule

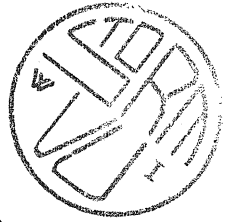
$$A(BC) = (AB)C.$$

Als $A = \{a\}$ een singleton is, schrijven we AB liever als aB . (Deze notatie kennen we al in bijvoorbeeld $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: hier is $6\mathbb{Z}$ de verzameling der 6-vouden van gehele getallen.

- e. We keren terug naar de equivalentierelatie L van onderdeel c. Laat nu zien:

$$uLv \Leftrightarrow v \in uH.$$

- f. Schrijf de equivalentie relatie L en de formules in onderdelen d. en e. in de additieve notatie.



g. Zij $G = (\mathbb{Z}, +)$ de abelse groep van gehele getallen met de operatie "optelling". Zij $m \geq 2$ in $\mathbb{Z}$ en $H = m\mathbb{Z}$. Laat zien, met L als in onderdeel c.:

$$u \equiv v \pmod{m} \Leftrightarrow uLv.$$

h. Licht de volgende twee conclusies toe:

$$\bar{u} = u + m\mathbb{Z}.$$

$$\bar{u} + \bar{v} = u + m\mathbb{Z} + v + m\mathbb{Z} = (u + v) + m\mathbb{Z} = \overline{u + v}.$$

Honorering: Voor elk van de 10 verplichte onderdelen kunt U 5 punten behalen. In totaal kunt U dus 50 punten behalen, met bonusvraag erbij wordt dit dan zelfs 55.

Het eindcijfer E wordt berekend naar:

$$E = \frac{\text{totaal behaald}}{5}.$$

gevolgd door afronden: beneden eindcijfer 10 naar boven, erboven naar beneden.