



Faculteit FEW

Tentamen Inleiding Algebra

(I Wisk.)

Vrije Universiteit

27 Augustus 2002

1

In $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ zijn de veeltermen $F = X^4 + \bar{3}X^3 - \bar{12}X^2 - \bar{6}X + \bar{20}$ en $G = \bar{2}X^2 + \bar{3}X + \bar{1}$ gegeven. Bepaal de grootste gemene deler D van F en G en schrijf deze in de vorm $D = AF + BG$ met $A, B \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.

2

a. Geef de definitie van de volgende begrippen:

- De deelverzameling H is een *deelgroep* van de groep G .
- De groep G is een *cyclische groep*.
- Hoe luidt het *criterium voor een ondergroep*?
- De deelgroep N is een *normaaldeler* in de groep G .
- De *orde* van een element in een groep.
- *Isomorfisme* van uitaire ringen.
- Zij $X := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Wat is een permutatie van X ?

b. Laat zien, dat in een eindige groep elk element ook werkelijk een eindige orde heeft.

c. Schrijf de permutatie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

als een product van disjuncte cykels. Schrijf deze tevens als een product van tweecykels. Geef in beide notaties de inverse van deze permutatie.

3

Zij G een groep en $A(G)$ de verzameling van alle isomorfismen van G in zichzelf, dus van alle homomorfismen $f: G \rightarrow G$, waarbij een homomorfisme $f: G \rightarrow G$ bestaat met de eigenschappen $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1_G$, de identieke afbeelding van G in zichzelf.

a. Bewijs zorgvuldig dat $(A(G), \circ)$ een groep is onder "o", de samenstelling van afbeeldingen.

b. Laat voor elke $a \in G$, de afbeelding $\phi_a : G \rightarrow G$ gedefinieerd zijn door

$$\forall g \in G : \phi_a(g) = aga^{-1}.$$

Bewijs, dat $\phi_a \in A(G)$, met andere woorden, dat ϕ_a een isomorfisme van groepen is.

c. Door het vorige onderdeel wordt een afbeelding $j : G \rightarrow A(G)$ gemaakt, en wel:

$$\forall a \in G : j(a) := \phi_a.$$

Bewijs, dat j een homomorfisme van groepen is.

d. De kern van een homomorfisme $f : G \rightarrow H$ van groepen is de verzameling $\{g \in G \mid f(g) = e\}$, waarbij e het neutrale element van H is. Bewijs, dat deze kern altijd een normaaldeeler is.

e. Definieer de relatie R op de groep G , door: $gRh \Leftrightarrow \exists a \in G : g = aha^{-1}$.
Laat zien, dat R een equivalentie relatie is.

f. Laat zien: een element $z \in G$ behoort tot de kern van j , als en enkel alleen als zijn equivalentie klasse naar R (uit onderdeel e.) uit z zelf bestaat.

Honorering: opgave 1: 5

opgave 2: a,b,c: 5,4,3

opgave 3: voor elk onderdeel 3

In totaal kunt U dus maximaal 35 punten behalen.

Het eindcijfer E wordt berekend naar:

$$E = \frac{\text{totaal behaald} + 5}{4}.$$

gevolgd door afronden.

