

Faculteit FEW

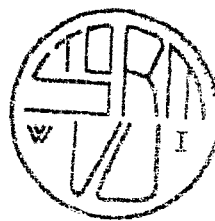
1e toets Inleiding Algebra

(I Wisk.)

Vrije Universiteit

22 november 2001

Als U een van de onderdelen niet kunt maken,
dan mag U toch dergelijke onderdelen
gebruiken bij Uw antwoord van andere onderdelen.



1

- V is een verzameling. Geef de definitie van R is een *equivalentie relatie* op V en
- van de *equivalentie klasse* van het element $v \in V$.
- Hoe definieer je tevens in deze situatie de verzameling V/R ?
- Geef de definitie van een *operatie* $*$ op de verzameling V en
- hoe definieer je dan: de equivalentie relatie R op V is een *congruentie relatie* voor de operatie $*$
- Formuleer de stelling van het *delingsalgoritme*, zowel voor $\mathbb{Z}$ als voor $l[X]$, waarbij l een lichaam is..
- Definieer: d is de *grootste gemene deler* van de gehele getallen $\{a_1, \dots, a_n\}$.
- Definieer een *priemrestklasse* modulo m , waarbij $m \geq 2$ in $\mathbb{Z}$.

2

- a. Bepaal de verzameling van gehele getallen x , die voldoen aan de twee vergelijkingen

$$x \equiv 8 \pmod{25}, (1) \text{ en } x \equiv 25 \pmod{8}, (2).$$

- b. Bepaal, indien mogelijk, twee priemgetallen p met de eigenschap $p-5$ is deelbaar door 3 en $p-3$ is deelbaar door 5.
- c. Bepaal gehele getallen a en b die de grootste gemene deler d van $x = 446$ en $y = 644$ schrijven in de vorm $d = ax + by$.

3

- a. Laat zien dat voor twee gehele getallen a en b , niet beide gelijk aan 0 geldt: $\text{ggd}(a, b) = 1 \Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z} : xa + yb = 1$.
- b. Gegeven is, dat $M, N \in \mathbb{N}$ natuurlijke getallen zijn, elk groter dan 1. Laat zien: als $a \in \mathbb{Z}$ en $\text{ggd}(a, MN) = 1$, dan is $\text{ggd}(a, M) = 1$ en $\text{ggd}(a, N) = 1$.
- c. Gegeven is weer, dat $M, N \in \mathbb{N}$ natuurlijke getallen zijn, elk groter dan 1. Zij nu bovendien gegeven, dat $\text{ggd}(M, N) = 1$. Stel er zijn gehele getallen a en b , zodat $\text{gcd}(a, M) = 1$ en $\text{gcd}(b, N) = 1$. Volgens de chinese reststelling is er een $c \in \mathbb{Z}$, met $c \equiv a \pmod{M}$ en $c \equiv b \pmod{N}$. Bepaalt deze c een priemrestklasse modulo MN ? (Zo ja, bewijs dit, zo nee, geef een tegenvoorbeeld)

4

In deze opgave zijn A en B twee gegeven commutatieve unitaire ringen en $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ het cartesische product.

a. Definieer een optelling en een vermenigvuldiging op $A \times B$ door

$$\forall a, a' \in A, \forall b, b' \in B : (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \text{ en } (a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb').$$

Licht toe, dat met deze operaties, $(A \times B, +, \cdot)$ een commutatieve unitaire ring is.

We noemen deze ring $A \times B$ de *productring van A en B*.

b. We hebben voor elke unitaire ring S , (dus zeker voor elke commutatieve unitaire ring S) de groep S^* gedefinieerd als de verzameling van elementen uit S , die een inverse hebben voor de vermenigvuldiging. Laat nu voor de productring $A \times B$ zien:

$$(A \times B)^* = A^* \times B^*.$$

Honorering:

voor opgave 1: 10 punten

voor opgave 2,3 en 4: elk onderdeel 5 punten.

U kunt dus totaal 50 punten behalen

Het eindcijfer E wordt berekend aan de hand van de formule

$$E = \frac{\text{behaald} + 5}{5},$$

gevolgd door afronden en het maximum ervan met 10 te nemen.

