



1

- Bepaal de grootste gemene deler d van de getallen 325 en 234 en schrijf d in de vorm $d = 325x + 234y$ met gehele getallen x en y .
- Bepaal alle oplossingen (x, y) van $d = 325x + 234y$ met $x, y \in \mathbb{Z}$.
- Als d de grootste gemene deler is van het paar gehele getallen (a, b) , is dan de vergelijking $ax + by = 2d$ oplosbaar met $x, y \in \mathbb{Z}$? Is de vergelijking $2ax + 2by = d$ oplosbaar met $x, y \in \mathbb{Z}$? Zo ja, geef een bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.
- Laat $a, b \in \mathbb{Z}$, niet beide gelijk 0, en $c \in \mathbb{N}$. Bewijs:

$$\text{ggd}(a, b) \cdot c = \text{ggd}(ac, bc).$$

- Zij $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. We hebben al gezien: de relatie R op $\mathbb{Z}$, gedefinieerd door

$$xRy \Leftrightarrow m \mid x - y,$$

is een equivalentie relatie. Zij K een equivalentie klasse voor deze relatie. Bewijs: alle elementen, die tot K behoren hebben dezelfde grootste gemene deler met m , dus: als $u, v \in K$, dan is $\text{ggd}(u, m) = \text{ggd}(v, m)$.

- Is het omgekeerde waar: "alle elementen, die dezelfde grootste gemene deler met m hebben, behoren tot dezelfde equivalentie klasse? Motiveer Uw antwoord.

2

Zij G een groep en H een ondergroep van G . We schrijven voor $g \in G$:

$$gH := \{gh \mid h \in H\}.$$

Beschouw de volgende relatie L op G : $gLk \Leftrightarrow k^{-1}g \in H$.

- Laat zien, dat L een equivalentierelatie is. Hoe ziet deze relatie eruit in de additieve notatie?
- Bewijs, dat de equivalentieklassen precies de deelverzamelingen van de vorm gH zijn. Hoe zien deze equivalentieklassen eruit in de additieve schrijfwijze?
- Bewijs: als de groep G een abelse groep is, dan is L een congruentie relatie voor de operatie in G .
- Laat $G = (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +)$ en $H = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\}$. Bepaal de equivalentieklassen voor de relatie L .
- Aangezien in het vorige onderdeel de groep $(G, +)$ abels is, erft de verzameling van equivalentieklassen, genoteerd G/H de operatie, die we zullen noteren als " $\oplus$ ". Is $(G/H, \oplus)$ een groep?. Geef de " $\oplus$ "-tabel voor de elementen van $(G/H, \oplus)$.

3

Laat $S \neq \emptyset$ een verzameling zijn en $(R, +, \cdot) \in \text{CUR}$, dat wil dus zeggen R is een commutatieve unitaire ring. We laten T de verzameling van alle afbeeldingen $f: S \rightarrow R$ zijn. We definiëren voor $f, g \in T$ twee operaties: „+” en „.” door

$$(f + g)(s) := f(s) + g(s) \quad , \quad (f \cdot g)(s) := f(s) \cdot g(s) \quad (s \in S).$$

a. Laat zien, dat T met deze operaties eveneens een commutatieve unitaire ring is.

b. Neem nu $R := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Definieer voor elke $A \subset S$ de afbeelding $\phi_A \in T$ door

$$\phi_A(s) = \bar{1} \Leftrightarrow s \in A.$$

Zij nu $\mathcal{P}(S)$ de verzameling van alle deelverzamelingen van S en definieer de afbeelding $F: \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ door $F(A) := \phi_A$. Laat zien, dat F bijectief is.

c. Maak nu met behulp van deze bijectieve F de operaties „+” en „.” op $\mathcal{P}(S)$ door

$$A + B := F^{-1}(F(A) + F(B)) \quad , \quad A \cdot B := F^{-1}(F(A) \cdot F(B)), \quad A, B \in \mathcal{P}(S).$$

Uit het vorige onderdeel weten we, dat hierdoor $\mathcal{P}(S)$ een commutatieve unitaire ring wordt. Druk de ringoperaties uit in de gebruikelijke operaties voor verzamelingen, zoals vereniging, doorsnede en complement.

d. Heeft $\mathcal{P}(S)$ nuldelers? Zo ja geef een voorbeeld, zo nee, bewijs dit.

Honorering: voor elk onderdeel is maximaal 5 punten haalbaar. Bij 15 onderdelen derhalve 75 punten. Het eindcijfer E wordt berekend naar:

$$E = \frac{\text{totaal behaald} + 5}{8},$$

gevolgd door afronden.

