

Faculteit Exacte Wetenschappen Tentamen Inleiding Algebra
(I Wiskunde)
Vrije Universiteit 11-06-1999

Maak 15 van de volgende onderdelen, waarbij uit elke opgave er minstens twee gemaakt moeten worden. Opgave 3 moet in zijn geheel gemaakt worden. Teveel maken levert geen extra punten!

1

Bepaal alle oplossingen in $\mathbb{Z}$, voorzover ze bestaan, van:

- het stelsel $6x \equiv 3 \pmod{12}$; $4x \equiv 0 \pmod{12}$.
- het stelsel $5x - 2y \equiv 3 \pmod{10}$; $x + 3y \equiv 2 \pmod{10}$.

2

Onderzoek op irreducibiliteit en motiveer Uw antwoord:

- $\frac{1}{8}X^3 + 3X + 2$ in $\mathbb{Q}[X]$.
- $X^4 - 7X^2 + 1$ in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.
- $14X^4 + 72X^2 + 12X + 4$ in $\mathbb{R}[X]$.
- $14X^4 + 72X^2 + 12X + 4$ in $\mathbb{Q}[X]$.
- $X^2 - 6$ in $\mathbb{Z}[X]$.

3

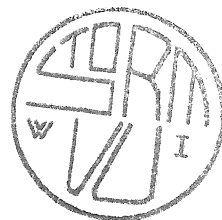
Beschouw $F := X^3 + X^2 + 1 \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$.

- Is $K := (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]/(F)$ een lichaam? Motiveer Uw antwoord.
- Geef twee bases voor K als vectorruimte over $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Druk X^5 uit op de eerste basis. (Als U deze bases te ingewikkeld maakt, dan kost het U alleen maar tijd!)
- Bepaal, zo deze bestaat, de inverse van $X^2 + X$ in K .

4

Zij V een vierkant. Nummer de hoekpunten van V achtereenvolgens 1 t/m 4. Zij r de rotatie $r = (1\ 2\ 3\ 4)$ en s de spiegeling $(1\ 2)$. Zij G de symmetriegroep van dit vierkant.

- Bepaal de orde van G en laat zien, dat een element x van G in de vorm $x = r^i s^j$ te schrijven is, waarbij $0 \leq i < 4, 0 \leq j < 2$.
- Laat eveneens zien, dat x de vorm $x = s^u r^v$ heeft.
- Uit de twee vorige onderdelen volgt, dat rs de vorm $rs = s^u r^v$ heeft. Bepaal u en v .
- Laat zien, dat $H = \{(1), rs^2\}$ een ondergroep is. Is H een normale ondergroep?
- We laten H door linksvermenigvuldiging werken op G . Bepaal de banen die er onder deze werking zijn.
- We laten H door rechtsvermenigvuldiging werken op G . Bepaal eveneens de banen, die er onder deze werking zijn.



5

Beschouw op het cartesisch product $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ van de verzameling van positieve gehele getallen de relatie R , gegeven door $(m, n)R(s, t) \Leftrightarrow m + t = n + s$.

- Laat zien, dat R een equivalentie relatie is.
- Welke paren liggen in de equivalentie klasse van $(1,1)$, welke in die van $(2,1)$ en welke in die van $(1,2)$?
- Geef een volledig representanten systeem voor de verzameling V van equivalentieklassen.
- Laat zien, dat R een congruentie relatie is voor de plaatsgewijze optelling op $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Is het een congruentie relatie voor de plaatsgewijze vermenigvuldiging? Zo ja, bewijs dit, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.
- Zij $(V, +)$ de verzameling van equivalentieklassen voor de relatie R tesamen met de geïnduceerde operatie. Ga na of deze optelling "+" van V een abelse groep maakt.

Honorering: voor elk onderdeel is maximaal 5 punten haalbaar. Bij 15 onderdelen derhalve 75 punten. Het eindcijfer E wordt berekend naar:

$$E = \frac{\text{totaal behaald} + 5}{8}.$$

gevolgd door afronden.