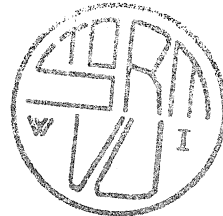


1

Bepaal alle gehele getallen x , zodat:

- a. $x \equiv 2 \pmod{18}$ en $x \equiv 11 \pmod{27}$.
- b. $x \equiv 5 \pmod{18}$ en $x \equiv 11 \pmod{27}$.

Let op: de moduli zijn hier niet relatief priem !



2

Zij k een lichaam en F en G twee elementen van $k[X]$ met $F = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, $\deg(G) \geq 1$ en $\deg(F) > 1$. Definieer $\phi: k[X] \rightarrow k[X]$ door: $\phi(F) = F(G) := a_0 + a_1G + \dots + a_nG^n$. In het navolgende mag U gebruiken, dat ϕ een unitair ringhomomorfisme is.

- a. Toon aan, als F reducibel is, dan is ook het polynoom $\phi(F) = F(G)$ reducibel in $k[X]$. Geldt het omgekeerde ook? (Bewijs, of geef een tegenvoorbeeld.)
- b. Zij nu $k = \mathbb{Q}$, $F = X^3 + 3X + 2$ en $G = X + 1$. Toon aan, dat $F(G)$ irreducibel is. Laat zien, dat F irreducibel is.
- c. Zij p een priemgetal. Toon aan, dat $X^p - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ in irreducibele factoren te ontbinden is als volgt:

$$X^p - 1 = (X - 1)(X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1). \quad (1)$$

(Hint: denk aan gedeelte a. en probeer eens $G := X + 1$).

3

Geef van de volgende verzamelingen aan wat de sterkste eigenschap is, Ring-UR-CUR-ITG-Lichaam) waaraan ze nog voldoen. Een antwoord volstaat.

- a. $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$.
- b. $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})[X]$.
- c. $(\mathbb{Z}/53\mathbb{Z})[X]/(X^2 + 4)$.
- d. $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 4)$.
- e. $\mathbb{Z}[X]$.
- f. Een abelse groep $(G, +)$ van minstens twee elementen, met neutraal element 0, de vermenigvuldiging is gegeven door $\forall a, b \in G : ab = 0$.

4

Zij G een groep van 16 elementen, die werkt op een verzameling van 15 elementen. Laat zien, dat er een element moet zijn, waarvan de stabilisator geheel G is.

5

De groep $\text{Gl}_2(\mathbb{R})$ is de groep van 2×2 matrices met determinant ongelijk 0 en coëfficiënten in $\mathbb{R}$.

- Laat zien, dat $f : \text{Gl}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(A, x) := \det(A) \cdot x$ een linkswerking is.
- Geef de banen en stabilisatoren bij deze werking. (Antwoord volstaat).
- Is f een transitieve werking? Antwoord volstaat.

6

Zij $R := (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ en $A, B \in R$ gegeven door

$$A = X^5 + X^2 + X + \bar{1}, B = X^4 + X^3 + X^2 + X.$$

- Bepaal de grootste gemene deler D van A en B in R en schrijf deze in de vorm $D = PA + BQ$, met $P, Q \in R$.
- Bepaal met behulp van onderdeel a. de factorisering van A en B als product van irreducibele veeltermen in R .
- Een *nilpotent* element in een commutatieve ring is een element x , waarvoor een $N \in \mathbb{N}$ bestaat met $x^N = 0$. Laat zien: zijn x en y in een dergelijke ring nilpotent, dan ook hun som $x + y$. (hint bekijk $(x + y)^M$ voor M voldoende groot.) Laat zien: is $x \neq 0$ een nilpotent element, dan is x een nuldeeler. Geldt het omgekeerde ook?
- Bepaal (eventuele) nuldelers en nilpotente elementen van de ring $R/(A)$

Honorering:

Voor deze 6 opgaven zijn de honoreringen achtereenvolgens 7-10-10-7-10-10. In totaal kunt U derhalve 54 punten scoren.

Het eindcijfer E wordt berekend naar:

$$E = \frac{\text{totaal behaald} + 6}{6}$$

gevolgd door afronden.

