

1

Ga na dat de veelterm $F = X^2 - X + 1$ irreducibel is in $\mathbb{R}[X]$. Zij K het lichaam $K := \mathbb{R}[X]/(F)$. De klasse van een element G modulo F geven we aan met $\overline{G}$. Bepaal in K de multiplicatieve inverse van

- a. $\overline{1} - \overline{X}$
- b. $\overline{X}^2 + \overline{X}$.

2

Ontbind de veelterm $X^6 - \overline{1}$ in irreducibele factoren:

- a. Over het lichaam $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$,
- b. over het lichaam $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$,
- c. over het lichaam $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- d. over het lichaam $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3

In deze opgave bewijzen we onder meer, dat elke groep van orde 289 een abelse groep is. Zij G een groep, multiplicatief geschreven.

- a. Het centrum van G , is de verzameling $\{x \in G \mid \forall g \in G : xg = gx\}$. Laat zien, dat dit centrum een ondergroep is.
- b. Laat zien, dat dit centrum een normaaldeler is.
- c. Laat G nu als orde de macht p^k , $k > 0$ van een priemgetal p hebben. We definiëren

$$l: G \rightarrow G, l(g, x) := gxg^{-1}, \forall x, g \in G$$

en schrijven $l(g, x)$ als $g \star x$. Laat zien dat $\star: G \times G \rightarrow G$ een linkswerking van G (als groep) op G (als verzameling) is.

- d. Zoals U weet, is het aantal elementen in een baan onder een werking een deler van de orde p^k van de groep. Kan de gegeven werking transitief zijn? Kan de gegeven werking ook banen hebben, bestaande uit $p^0 = 1$ element? Zo ja, bewijs dat, zo nee geef een tegenvoorbeeld. Interpreteer het centrum van G in termen van banen onder de gegeven linkswerking.
- e. Zij voor $0 \leq i \leq k$ het aantal banen met p^i elementen gelijk aan n_i . Is de volgende formule juist?

$$p^k = \sum_{i=0}^k n_i p^i.$$

Zo ja, waarom, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

- f. Bewijs nu, dat G een centrum heeft, dat uit minstens p elementen bestaat. (Hint: bekijk de deelbaarheid door p van de grootheden n_i uit onderdeel e.)

Laat nu zelfs $k = 2$, zodat de orde van G gelijk is aan p^2 . Uit het voorafgaande gedeelte weten we, dat het centrum van G minstens p elementen heeft. We gaan nu afleiden, dat dit centrum in deze groep zelfs orde p^2 heeft, dus gelijk is aan de gehele groep. Met andere woorden: een groep van orde p^2 , met p een priemgetal is altijd abels. Vul het bewijs hiervan in aan de hand van de volgende stappen:

- g. Stel, de orde van het centrum Z is p . Daar Z een normaaldeler is, is de factorgroep G/Z een groep van orde p . Laat zien, dat deze factorgroep G/Z een cyclische groep is. Er is dus een equivalentieklasse xZ , die G/Z voortbrengt.
- h. We noteren de operatie op de groep G/Z door “ $\star$.” Geef de formule voor de operatie $\star$ in G/Z in termen van

$$(xZ) \star (yZ) = ??$$

(Hier moet U de vraagtekens invullen.)

- i. Leg nog eens uit, waarom deelverzamelingen van G van de vorm xZ met $x \in G$, voor (variabele x) hetzij disjunct zijn, hetzij gelijk zijn en geef in formulevorm een nodige en voldoende voorwaarde, dat $xZ \cap yZ = \emptyset$.
- j. Laat nu zien, dat elk element van G in de vorm $x^i z$ te schrijven is met $0 \leq i < p$ en $z \in Z$. Laat eveneens zien, dat als $0 \leq i, i' < p$ en $z, z' \in Z$, dan: $x^i z = x^{i'} z' \Leftrightarrow i = i', z = z'$.
- k. Bewijs nu, dat G abels is en laat zien, dat elke groep van orde 289 een abelse groep is.

Honorering: voor elk onderdeel is maximaal 5 punten haalbaar. Bij 17 onderdelen derhalve 85 punten. Het eindcijfer E wordt berekend naar:

$$E = \frac{\text{totaal behaald} + 5}{9},$$

gevolgd door afronden.