



Maak 15 van de 18 volgende onderdelen

1

- a. Toon aan: voor gehele getallen $a_1, \dots, a_n$ met niet alle $a_1, \dots, a_{n-1}$ gelijk aan 0 geldt:

$$\text{ggd}(a_1, \dots, a_n) = \text{ggd}(\text{ggd}(a_1, \dots, a_{n-1}), a_n).$$

- b. Bepaal alle gehele getallen x , zodat aan het volgende systeem van 3 vergelijkingen voldaan is:
 $x \equiv 3 \pmod{11}$, $x \equiv 2 \pmod{5}$ en $x \equiv 1 \pmod{7}$.

- c. Bewijs of weerleg: $(a, b) = d \Rightarrow (a + d, b) = d$.

- d. Bestaat er een rij van 20 opeenvolgende gehele getallen met de eigenschap: de eerste is deelbaar door de eerste macht van een priemgetal, de tweede door de tweede machten van twee priemgetallen, de derde door de derde machten van 3 priemgetallen, en zo door: de j^{de} is deelbaar door de j^{de} machten van j priemgetallen voor $1 \leq j \leq 20$? Zo ja, bewijs dit, zo nee geef een tegenvoorbeeld.

2

- a. Ga na, of 45 een priemrestklasse modulo 1829 definieert, en zo ja, bereken tevens de inverse priemrestklasse? (Ter herinnering, $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$, de priemrestklassen modulo m zijn precies de eenheden in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.)

- b. Zij k een lichaam. Laat zien, dat $k[X]^*$, de eenhedengroep van $k[X]$, (dus de groep van elementen uit $k[X]$, die een inverse hebben voor de vermenigvuldiging), te identificeren is met de verzameling constante veeltermen, die ongelijk 0 zijn, derhalve te identificeren is met k^* .

- c. Zij nog immer k een lichaam en $m = X^2 + aX + b$ een element van $k[X]$. Licht toe, waarom de veeltermen van graad ≤ 1 tesamen met de nulveelterm een volledig stelsel representanten voor de elementen van $k[X]/(m)$ zijn.

- d. Stel eerst, dat m irreducibel is. Bepaal de eenheden van $k[X]/(m)$.

- e. Zij nu $m = (X + A)(X + B)$ met $A, B \in K$. Laat zien: de klasse van $X + d$ modulo m is een eenheid in $k[X]/(m)$ dan en alleen maar dan als $d \notin \{A, B\}$.

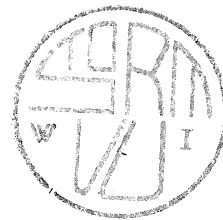
3

We beschouwen een kubus K en verbinden daarin de middens van alle zijvlakken. Al deze verbindende lijnstukken omsluiten een lichaam V met zes hoekpunten en acht zijvlakken.

- a. Hoeveel elementen heeft de symmetriegroep S_K van K ?

- b. Hoeveel elementen heeft de symmetriegroep S_V van V ?

- c. Kunt U door beperking van de werking van de elementen van S_K tot de hoekpunten van V een afbeelding $f: S_K \rightarrow S_V$ maken? Is f een homomorfisme? en, zo ja, is f een isomorfisme? Beargumenteer Uw antwoord.



4

Zij G een groep en $S \subset G$ een niet lege deelverzameling van G . Bij S bekijken we de twee andere verzamelingen S' bestaande uit alle elementen van de vorm s^{-1} , waarbij $s \in S$, en de vereniging $T := S \cup S'$. Tenslotte maken we $\langle S \rangle$, de verzameling van alle producten uit G , waarvan de factoren tot T behoren.

- a. Formuleer het ondergroep-criterium en laat met behulp daarvan zien, dat $\langle S \rangle$ een ondergroep van G is.

Laat nu S de verzameling van alle elementen c uit G zijn, waarvoor $a, b \in G$ bestaan met $c = aba^{-1}b^{-1}$. (Een dergelijk element heet een *commutator* en de groep $\langle S \rangle$ heet in dit geval de *commutator ondergroep* van G).

- b. Laat eerst zien, dat in dit geval met de al ingevoerde notaties geldt: $S = S'$, dus T bestaat uit alle mogelijke producten van alle mogelijke commutatoren.
- c. Laat tevens zien, dat G een abelse groep is, dan en slechts dan als het neutrale element e de enige commutator is.

Zij nu G de symmetriegroep van een vierkant, waarvan de hoekpunten opeenvolgend genummerd zijn van 1 t/m 4. Zij τ hierin de rotatie om 90 graden, die de hoekpunten 1,2,3 en 4 overvoert in respectievelijk 2,3,4 en 1, dus τ is voor te stellen door de cykel $(1\ 2\ 3\ 4)$ en laat σ de spiegeling zijn om de lichaamsdiagonaal, die 1 en 3 verbindt, dus σ is voor te stellen door de cykel $(2\ 4)$.

- d. Laat zien: G bestaat uit de elementen $\tau^i \sigma^j$ met $0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 1$.
- e. Laat zien: $\tau^4 = \sigma^2 = (1)$, het neutrale element en

$$\sigma\tau = \tau^3\sigma.$$

- f. Volgens onderdeel e. is G niet commutatief. Volgens onderdeel c. is er een commutator $c \neq (1)$. Bepaal zo een commutator $c \neq (1)$.

Honorering: Voor elk onderdeel is 5 punten te halen. In totaal dus maximaal 75 punten. Het eindcijfer E wordt berekend naar:

$$E = \frac{\text{totaal behaald} + 5}{8}$$

gevolgd door afronden.