

Faculteit Wiskunde en Informatica

1e toets Inleiding Algebra

(I Wisk.)

Vrije Universiteit

23-03-1998

1

Definieer op $\mathbb{Q}$ de relatie R door:

$$xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

- Laat zien, dat R een equivalentierelatie is.
- Bewijs, dat $I := \{x \in \mathbb{Q} | 0 \leq x < 1\} \subset \mathbb{Q}$ een volledig stelsel klassenvertegenwoordigers is.
- Is R een congruentierelatie voor de optelling? Zo ja, bewijs dit, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.
- Is R een congruentierelatie voor de vermenigvuldiging? Zo ja, bewijs dit, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.
- De klasse van $x \in \mathbb{Q}$ modulo R geven we aan met $[x]$. Indien in een van de onderdelen c. of d. R een congruentierelatie is voor de operatie $* \in \{+, \cdot\}$, dan heeft de verzameling van equivalentieklassen $\mathbb{Q}/R$, in de literatuur meestal genoteerd $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, eveneens een operatie, weer genoteerd “ $*$ ” via:

$$[x] * [y] := [x * y].$$

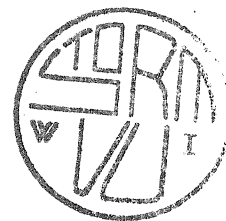
Ga na in de gevallen, waarin van een congruentierelatie sprake is, of deze operatie associatief is, een neutraal element heeft en of elk element een inverse heeft. (Bij dit onderdeel volstaan de antwoorden).

2

- Geef de definitie van een priemrestklasse modulo 15?
- Licht toe, dat de verzameling $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$ van priemrestklassen modulo 15 gesloten is onder vermenigvuldiging en een groep is.
- Geef de tabel van de de priemrestklassen $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$ modulo 15 onder vermenigvuldiging van priemrestklassen.
- Neem in deze verzameling van priemrestklassen modulo 15 de verzameling H van alle elementen van de vorm $\bar{x}^2$. Schrijf H op. Is deze H gesloten onder vermenigvuldiging? Indien ja, is H op zichzelf een groep?
- Neem in de verzameling van priemrestklassen modulo 15 de verzameling K van alle elementen x , waarvoor $x^2 = \bar{1}$. Schrijf K op. Is K gesloten onder vermenigvuldiging, en is K op zichzelf een groep?

3

Twee vlooiën, Jumpertje (J) en Springertje (S) springen heen en weer op de wijzerplaat van een klok. J springt sprongen ter grootte van 7 minuten, terwijl S die ouder, sterker en groter is, sprongen ter grootte van 11 minuten maakt. Ze doen een wedstrijd: ze beginnen op de 12 te springen, en gewonnen heeft diegene die al springend het eerst op het cijfer 6 gearriveerd is. Voor ze beginnen waren J en S het er al over eens, dat als ze eenmaal begonnen zijn te springen, ze in de gekozen richting verder moeten gaan. J en S zijn overigens beter in het springen dan in algebra.



Wie is de winnaar? Bepaal het minimum aantal sprongen, dat voor de winnaar nodig is.

Honorering: voor elk onderdeel van de opgaven is maximaal 5 punten haalbaar. Bij 11 onderdelen derhalve 55 punten. Het eindcijfer E wordt berekend naar:

$$E = \frac{\text{totaal behaald} + 5}{6}$$

gevolgd door afronden.