

VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM  
Faculteit der Exacte Wetenschappen, Afdeling Wiskunde  
Tentamen WACHTRIJSYSTEMEN (401061)  
op 12 februari 2014, 18.30 – 20.30 uur.

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Gebruik van het boek en grafische rekenmachine is niet toegestaan. Een formuleblad is te vinden aan het einde van het tentamen.

Bij elk onderdeel staat tussen rechte haken vermeld hoeveel punten voor het onderdeel kunnen worden verkregen. Het tentamencijfer wordt gegeven door:  $\# \text{ punten} / 3 + 1$ .

**Opgave 1.** Beschouw een M/M/2/4 wachtrijsysteem: klanten arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit  $\lambda$ . De bedieningstijden zijn exponentieel verdeeld met intensiteit  $\mu$ . Er zijn 2 bedienden en er is plaats voor maximaal 4 klanten in het systeem. Arriverende klanten die de wachtrij vol treffen worden geweigerd en gaan verloren.

- (a) [1 pt.] Geef aan waarom het aantal klanten in het systeem een unieke evenwichtsverdeling heeft.
- (b) [4 pt.] Formuleer dit model als een continue-tijd Markov keten en specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten. Bepaal hiermee de evenwichtsverdeling.
- (c) [1 pt.] Wat is de fractie klanten die geweigerd worden?

Men besluit de wachtruimte uit te breiden, zodat er plaats is voor een onbegrensd aantal klanten. Echter, wanneer er  $n \geq 4$  klanten in het systeem zijn dan wordt een klant toegelaten met kans  $1/(n-3)$ ,  $n = 4, 5, \dots$ , en gaan anders verloren.

- (d) [2 pt.] Formuleer dit model als een continue-tijd Markov keten en specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten. Voor welke waarden van  $\lambda$  en  $\mu$  is dit systeem stabiel?

**Opgave 2.** Voor een bepaald type product is er een voorraad van (maximaal)  $K$  artikelen om direct aan de vraag van klanten te voldoen. Klanten arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit  $\lambda$ . Iedere klant vraagt 1 artikel. De bestelstrategie is als volgt. Iedere keer dat een artikel verkocht wordt, wordt onmiddellijk een bestelling van 1 artikel bij leverancier A geplaatst. De levertijd (duur van moment van bestelling tot de bestelling aankomt) is exponentieel verdeeld met intensiteit  $\mu$ . Wanneer een arriverende klant geen artikelen op voorraad aantreft, dan gaat de vraag verloren.

- (a) [4 pt.] Formuleer een geschikte continue-tijd Markov keten en specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten. Met welk bekend wachtrijmodel correspondeert deze Markov-keten?

Men besluit over te gaan op leverancier B. Hiervoor geldt dat de levertijd bestaat uit een vaste duur  $d = 1/(2\mu)$  plus een exponentieel verdeelde duur met intensiteit  $2\mu$ . Voor de levertijd  $L$  geldt dus

$$\mathbb{P}(L > t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, d] \\ e^{-2\mu(t-d)} & t > d. \end{cases}$$

- (b) [1 pt.] Heeft de nieuwe levertijd van leverancier B effect op de kans dat een klant geen artikelen op voorraad treft?
- (c) [2 pt.] Beschouw de resterende levertijd  $R$  van leverancier B. Laat zien dat, voor  $x > d$ , geldt

$$\mathbb{P}(R \leq x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2\mu(x-d)}.$$

Neem  $x$  groot. Voor welke leverancier is de kans dat de resterende levertijd  $R$  groter dan  $x$  is het grootst? Motiveer het antwoord.

**Opgave 3.** Beschouw een M/G/1 rij met aankomstintensiteit  $\lambda$ . De bedieningsduur  $B$  bestaat uit een serie van  $n$  opeenvolgende bewerkingen, met  $n \in \{1, 2, \dots\}$ . Iedere bewerking neemt een exponentieel verdeelde tijd in beslag met intensiteit  $n\mu$ . Ofwel,  $B = \sum_{i=1}^n B_i$  waarbij  $B_i$  exponentieel verdeeld is met intensiteit  $n\mu$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

- (a) [2 pt.] Laat zien dat de verwachte bedieningsduur gelijk is aan  $1/\mu$ . Stel verder dat een klant op een willekeurig moment arriveert waarop een andere klant in bediening is. Laat zien dat de verwachte resterende bedieningsduur wordt gegeven door

$$\mathbb{E}[R] = \frac{n+1}{2n\mu}.$$

- (b) [3 pt.] Stel dat  $\lambda = \frac{2}{3}$  en  $\mu = 1$ . Bepaal voor vaste  $n$  de verwachte wachttijd  $\mathbb{E}[W^q]$ . Schets (grafisch) hoe de verwachte wachttijd  $\mathbb{E}[W^q]$  zich gedraagt als functie van  $n$  voor  $n \in \{1, 2, \dots\}$ . Kunt u dit gedrag verklaren? Motiveer het antwoord.
- (c) [2 pt.] Bepaal het verwachte aantal klanten in de wachtrij, de verwachte verblijftijd en het verwachte aantal klanten in het systeem.

**Opgave 4.** Bij een productiesysteem fabriceert een machine twee type producten. De vraag van klanten naar producten van type  $i$  volgt een Poisson proces met intensiteit  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ . De duur voor het produceren van een product is voor beide typen gelijk en is exponentieel verdeeld met intensiteit  $\mu$ . Wanneer een product niet onmiddellijk kan worden gefabriceerd, dan wordt deze in een wachtrij geplaatst op basis van FCFS. Producten van type 1 hebben prioriteit, maar wanneer de productie van type 2 is gestart wordt deze niet onderbroken (non-preemptive). Wanneer er geen vraag meer is naar producten, dan wordt de machine stil gezet (er wordt dus niet op voorraad geproduceerd). Zodra er weer vraag is, dan wordt de machine opgestart. Het opstarten van de machine duurt een exponentieel verdeelde tijd met intensiteit  $\theta$ . We nemen aan dat  $\lambda_1 + \lambda_2 < \mu$ .

- (a) [3 pt.] Neem aan dat  $\lambda_1 + \lambda_2 < \mu$ . Beredeneer dat de verwachte wachttijd van type 1  $\mathbb{E}[W_1^q]$  en het verwachte aantal wachtende klanten van type 1  $\mathbb{E}[L_1^q]$  gerelateerd zijn via

$$\mathbb{E}[W_1^q] = \mathbb{E}[L_1^q] \times \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu} \times \frac{1}{\mu} + \left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu}\right) \frac{1}{\theta}.$$

Leid hiermee een formule af voor de verwachte wachttijd van type 1  $\mathbb{E}[W_1^q]$ .

- (b) [2 pt.] Stel nu dat de productie van type 2 wel wordt onderbroken wanneer een vraag naar type 1 producten arriveert (preemptive-resume). Geef aan hoe de aankomstrelatie eruit ziet. Zal  $\mathbb{E}[W_1^q]$  hierdoor stijgen, dalen, of gelijk blijven? Motiveer het antwoord.

## FORMULEBLAD

### Erlang verdeling

Laat  $S_n$  een  $\text{Erlang}(n, \mu)$  verdeling hebben. De staartkans van  $S_n$  is dan

$$P(S_n > t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!}.$$

### M/M/c wachtrij

Kans op wachten  $\Pi_W$ , verwachte aantal wachtende klanten  $E(L^q)$ , verwachting en kansverdeling van wachttijd  $W^q$  en kansverdeling verblijftijd  $S$

$$\begin{aligned}\Pi_W &= \frac{(c\rho)^c/c!}{(1-\rho) \sum_{i=0}^{c-1} (c\rho)^i/i! + (c\rho)^c/c!} \\ E(L^q) &= \Pi_W \frac{\rho}{1-\rho} \\ E(W^q) &= \Pi_W \frac{1}{c\mu(1-\rho)} \\ P(W^q > t) &= \Pi_W e^{-c\mu(1-\rho)t} \\ P(S > t) &= \frac{\Pi_W}{1-c(1-\rho)} e^{-c\mu(1-\rho)t} + \left(1 - \frac{\Pi_W}{1-c(1-\rho)}\right) e^{-\mu t}\end{aligned}$$

Relatie met Erlang-B:

$$\Pi_W = \frac{B(c, c\rho)}{1-\rho + \rho B(c, c\rho)}$$

### M/G/1 wachtrij

Verwachte wachttijd  $W^q$  voor FCFS (Pollaczek-Khintchine)

$$\begin{aligned}E(W^q) &= \frac{\rho}{1-\rho} \frac{E(B^2)}{2E(B)} \\ &= \frac{1}{2}(1+c_B^2)E(B) \frac{\rho}{1-\rho}\end{aligned}$$

Verwachte duur busy period

$$E(BP) = \frac{E(B)}{1-\rho}$$

### Resterende levensduur

Zij  $X$  de levensduur en  $R$  de resterende levensduur. Kansverdeling en verwachting van resterende duur  $R$

$$\begin{aligned}P(R \leq x) &= \frac{1}{E(X)} \int_0^x P(X > y) dy \\ E(R) &= \frac{E(X^2)}{2E(X)}\end{aligned}$$