

VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
Faculteit der Exacte Wetenschappen, Afdeling Wiskunde
Tentamen WACHTRIJSYSTEMEN (401061)
op 16 december 2013, 8.45 – 10.45 uur.

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Gebruik van het boek en grafische rekenmachine is niet toegestaan. Een formuleblad is te vinden aan het einde van het tentamen.

Bij elk onderdeel staat tussen rechte haken vermeld hoeveel punten voor het onderdeel kunnen worden verkregen. Het tentamencijfer wordt gegeven door: $\# \text{ punten} / 3 + 1$.

Opgave 1. Beschouw het volgende wachtrijsysteem. Klanten arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit λ . Er zijn twee bedienden, waarbij de bedieningstijd bij bediende i exponentieel verdeeld is met intensiteit μ_i , $i = 1, 2$. Arriverende klanten gaan naar de vrije bediende met de laagste index (dus naar bediende 1 als deze vrij is). Arriverende klanten die beide bedienden bezet treffen nemen plaats in een wachtrij, met onbeperkte capaciteit, en worden geholpen in volgorde van aankomst. Tijdens een bediening is het niet mogelijk van bediende te wisselen.

- (a) [1 pt.] Onder welke voorwaarde voor λ , μ_1 en μ_2 is dit systeem stabiel?
- (b) [5 pt.] Formuleer dit model als een continue-tijd Markov keten. Laat p_j , $j \in \{2, 3, \dots\}$ de kans op j klanten in het systeem zijn in de evenwichtssituatie. Druk p_j , voor $j = 2, 3, \dots$ uit in termen van p_2 . Druk hiermee de kans op wachten Π_W uit in termen van p_2 .
- (c) [2 pt.] Stel dat een arriverende klant vier klanten in het systeem treft (twee in de wachtrij en twee in bediening). Beargumenteer wat de wachttijdverdeling is. Geef een uitdrukking voor de kans dat de bedieningsduur van deze klant langer is dan t tijdseenheden.

Opgave 2. Een verzorgingshuis heeft N bewoners. Iedere bewoner heeft een bel die voor ‘nood’oproepen gebruikt kan worden. Er is één verzorgende die alle ‘nood’oproepen afhandelt. De duur voor het afhandelen van een ‘nood’oproep is exponentieel verdeeld met intensiteit λ . Voor iedere bewoner geldt dat de tijd tot een nieuwe ‘nood’oproep (vanaf het moment dat de vorige is afgehandeld) exponentieel verdeeld is met intensiteit μ . Wanneer er ‘nood’oproepen van meerdere bewoners uitstaan, dan worden deze door de verzorgende afgehandeld op volgorde waarin deze gegenereerd zijn. Een bewoner plaatst geen nieuwe ‘nood’oproep zolang zijn/haar ‘nood’oproep nog niet beantwoord is.

- (a) [3 pt.] Formuleer een continue-tijd Markov keten en specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten.
- (b) [3 pt.] Met welk bekend wachtrijmodel correspondeert bovengenoemde Markov keten? Bepaal de fractie tijd dat er geen ‘nood’oproepen afgehandeld worden in termen van de evenwichtskansen (deze hoeven niet bepaald te worden). Is dit resultaat wezenlijk anders wanneer de duur tot een nieuwe ‘nood’oproep (vanaf het moment dat de vorige is afgehandeld) een algemene kansverdeling heeft? En is dit resultaat wezenlijk anders wanneer de duur voor het afhandelen van een ‘nood’oproep een algemene kansverdeling volgt?

Opgave 3. Beschouw een M/G/1 wachtrij met aankomstintensiteit λ . Gemotiveerd door toepassingen in communicatiesystemen nemen we aan dat de bedieningsduur B een Pareto verdeling heeft met parameter $\alpha > 2$; ofwel de dichtheid $f_B(x)$ van de bedieningsduur is

$$f_B(x) = \begin{cases} \alpha x^{-(\alpha+1)} & x \geq 1 \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

en de staartkans is $\mathbb{P}(B > x) = x^{-\alpha}$ voor $x \geq 1$, en $\mathbb{P}(B > x) = 1$ voor $x \in [0, 1)$.

- (a) [2 pt.] Laat zien dat de verwachte bedieningsduur gelijk is aan $\alpha/(\alpha - 1)$. Stel verder dat een klant op een willekeurig moment arriveert waarop een klant in bediening is. Laat zien dat de verwachte resterende bedieningsduur wordt gegeven door

$$\mathbb{E}[R] = \frac{\alpha - 1}{2(\alpha - 2)}.$$

- (b) [3 pt.] Neem $\alpha > 2$ vast en neem aan dat de aankomstintensiteit λ gelijk is aan $3(\alpha - 1)/(4\alpha)$. Bepaal de verwachte wachttijd $\mathbb{E}[W^q]$. Schets grafisch hoe de verwachte wachttijd zich gedraagt als functie van $\alpha > 2$. Kunt u dit gedrag verklaren? Motiveer het antwoord.
- (c) [1 pt.] Wat is een geschikte manier om dit systeem in te richten (bv. een goede bedieningsdiscipline)? Motiveer het antwoord.
- (d) [2 pt.] Beschouw opnieuw de resterende bedieningsduur R en laat zien dat, voor $x \geq 1$,

$$\mathbb{P}(R > x) = \frac{1}{\alpha} x^{-(\alpha-1)}.$$

Laat daarmee zien dat voor $x > \alpha$ geldt dat $\mathbb{P}(R > x) > \mathbb{P}(B > x)$.

Opgave 4. Bij de poli van het ziekenhuis heeft men een klein call center, met slechts één medewerker. Telefoongesprekken arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit λ . De duur van een gesprek is exponentieel verdeeld met intensiteit μ , waarbij $\lambda < \mu$. Wanneer er geen gesprekken zijn, dan gaat de medewerker andere taken uitvoeren, zoals het beantwoorden van emails. De duur van deze andere taken is eveneens exponentieel verdeeld met intensiteit μ . Telefoongesprekken hebben non-preemptive prioriteit. We gaan er hier vanuit dat een medewerker altijd andere taken (emails) te doen heeft. Verder worden telefoongesprekken altijd op volgorde van aankomst bediend.

- (a) [3 pt.] Geef de aankomstrelatie voor de verwachte wachttijd van telefoongesprekken. Bepaal daarmee de verwachte wachttijd van telefoongesprekken.
- (b) [2 pt.] Bepaal het verwachte aantal telefoongesprekken, zowel in de wachtrij als in het systeem, en de verwachte verblijftijd van een telefoongesprek.

FORMULEBLAD

Erlang verdeling

Laat S_n een $\text{Erlang}(n, \mu)$ verdeling hebben. De staartkans van S_n is dan

$$P(S_n > t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!}.$$

M/M/c wachtrij

Kans op wachten Π_W , verwachte aantal wachtende klanten $E(L^q)$, verwachting en kansverdeling van wachttijd W^q en kansverdeling verblijftijd S

$$\begin{aligned}\Pi_W &= \frac{(c\rho)^c/c!}{(1-\rho) \sum_{i=0}^{c-1} (c\rho)^i/i! + (c\rho)^c/c!} \\ E(L^q) &= \Pi_W \frac{\rho}{1-\rho} \\ E(W^q) &= \Pi_W \frac{1}{c\mu(1-\rho)} \\ P(W^q > t) &= \Pi_W e^{-c\mu(1-\rho)t} \\ P(S > t) &= \frac{\Pi_W}{1-c(1-\rho)} e^{-c\mu(1-\rho)t} + \left(1 - \frac{\Pi_W}{1-c(1-\rho)}\right) e^{-\mu t}\end{aligned}$$

Relatie met Erlang-B:

$$\Pi_W = \frac{B(c, c\rho)}{1-\rho + \rho B(c, c\rho)}$$

M/G/1 wachtrij

Verwachte wachttijd W^q voor FCFS (Pollaczek-Khintchine)

$$\begin{aligned}E(W^q) &= \frac{\rho}{1-\rho} \frac{E(B^2)}{2E(B)} \\ &= \frac{1}{2}(1+c_B^2)E(B) \frac{\rho}{1-\rho}\end{aligned}$$

Verwachte duur busy period

$$E(BP) = \frac{E(B)}{1-\rho}$$

Resterende levensduur

Zij X de levensduur en R de resterende levensduur. Kansverdeling en verwachting van resterende duur R

$$\begin{aligned}P(R \leq x) &= \frac{1}{E(X)} \int_0^x P(X > y) dy \\ E(R) &= \frac{E(X^2)}{2E(X)}\end{aligned}$$