

Elke goedgeemaakte opgave levert drie punten op. 'Goedge-  
maakt' wil zeggen: correct, volledig beargumenteerd en netjes  
opgeschreven.

---

1. Zij  $U$  een niet-lege open deelverzameling van  $\mathbb{R}^2$ . Bewijs dat  $U$  een punt bevat waarvan beide coördinaten rationaal zijn.
2. Zij  $X$  een verzameling. De *co-aftelbare topologie*  $\mathcal{T}^*$  op  $X$  bestaat uit  $\emptyset$  en alle deelverzamelingen  $O$  van  $X$  waarvoor  $X \setminus O$  aftelbaar is.
  - a. Laat zien dat  $\mathcal{T}^*$  een topologie is op  $X$ .
  - b. Zij  $A \subseteq X$ . Bewijs dat de afgeleide verzameling  $A' = \emptyset$  als  $A$  aftelbaar is. Bewijs ook dat  $A' = X$  als  $A$  overaftelbaar is.
  - c. Laat zien dat de doorsnijding van een willekeurige aftelbare familie van elementen van  $\mathcal{T}^*$  weer tot  $\mathcal{T}^*$  behoort.
3. Zij  $X$  een Hausdorff-ruimte.
  - a. Bewijs dat elke eindige deelverzameling  $F$  van  $X$  gesloten is in  $X$ .
  - b. Zij  $(x_n)_n$  een rij in  $X$ . Bewijs dat  $(x_n)_n$  hooguit één limiet heeft.
4.
  - a. Bewijs dat als  $A$  een samenhangende deelverzameling is van een ruimte  $X$ , dan is de afsluiting  $\overline{A}$  samenhangend.
  - b. Bewijs dat als  $A$  een convexe deelverzameling is van  $\mathbb{R}^2$ , dan is de afsluiting  $\overline{A}$  convex.
  - c. Geef een voorbeeld van een ruimte  $X$  met een wegsamenhangende deelverzameling  $A$  waarvan de afsluiting  $\overline{A}$  niet wegsamenhangend is.