

# Tentamen Stochastische Processen (401026)

Vrije Universiteit Amsterdam  
Faculteit der Exacte Wetenschappen, Afdeling Wiskunde

12 februari 2015, 18.30 - 20.30 uur

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Gebruik van boeken en grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Bij elk onderdeel staat tussen rechte haken vermeld hoeveel punten voor het onderdeel behaald kunnen worden. Het tentamencijfer wordt gegeven door  $p/3 + 1$  waarbij  $p$  het totaal aantal door u behaalde punten is. Vermeld uw naam en studentnummer op alle in te leveren formulieren en geef bij elke vraag duidelijk aan hoe u tot uw antwoord bent gekomen.

Veel succes!

## Opgave 1

Een telefoonfabrikant maakt mobiele telefoons met een exponentiële levensduur. Gemiddeld treedt een eerste defect op na twee jaar. De telefoonfabrikant heeft winkels waar de telefoons ter reparatie aangeboden kunnen worden. In een van deze winkels komen klanten aan volgens een Poisson proces. De winkel differentieert de klanten in twee categorieën gebaseerd op de servicetijd die de klanten nodig hebben. De eerste categorie klanten heeft een exponentieel verdeelde servicetijd met een gemiddelde van 5 minuten. Gemiddeld komen er 10 van deze klanten per uur binnen. De tweede categorie klanten heeft een exponentieel verdeelde servicetijd met een gemiddelde van 15 minuten. Gemiddeld komen er 5 van deze klanten per uur binnen. De servicebalie in de winkel wordt bemand door slechts één persoon.

- (a) [1 pt.] Stel dat u anderhalf jaar geleden een nieuwe mobiele telefoon heeft gekocht van de hierboven beschreven telefoonfabrikant en dat uw telefoon nu nog steeds werkt. Hoe lang functioneert uw telefoon naar verwachting nog naar behoren?

- (b) [2 pt.] Stel dat u uw telefoon na een defect wilt aanbieden voor reparatie in de hierboven beschreven winkel. Als u de winkel betreedt zijn er reeds drie andere klanten aanwezig (één wordt er geholpen, twee staan er te wachten). Wat is de verwachte tijd totdat u aan de beurt bent?
- (c) [2 pt.] Wat is de kans dat er in de 15 minuten nadat u bij de winkel arriveert geen enkele andere klant arriveert?
- (d) [2 pt.] Klanten van de telefoonfabrikant kunnen een serviceabonnement afsluiten waarmee zij gratis service krijgen. Op basis van ervaring weet de winkel dat 40 procent van de eerste categorie klanten en 80 procent van de tweede categorie klanten een dergelijk abonnement heeft. Bewijs dat de kans dat in een willekeurig uur evenveel categorie 1 als categorie 2 klanten arriveren die een serviceabonnement hebben, gelijk is aan

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left( e^{-4} \frac{4^i}{i!} \right)^2.$$

- (e) [2 pt.] Na nieuw onderzoek blijken de genoemde percentages bij onderdeel (d) niet te kloppen. Uit nieuwe tellingen van opeenvolgende klanten blijkt het namelijk zo te zijn dat 75 procent van de klanten zonder abonnement gevolgd worden door een klant met abonnement, terwijl 20 procent van de klanten met abonnement gevolgd worden door een klant zonder abonnement. Welk percentage van de klanten die de winkel bezoeken heeft nu een abonnement?

## Opgave 2

In een economisch model verandert de aantrekkelijkheid van een aandeel maandelijks volgens een Markov keten. De Markov keten heeft twee toestanden. Als de aantrekkelijkheid van het aandeel in toestand  $i$  is in een bepaalde maand dan is het de volgende maand in toestand  $j$  met kans  $P_{i,j}$  waarbij

$$P_{0,0} = 0.4, \quad P_{0,1} = 0.6, \quad P_{1,0} = 0.2, \quad P_{1,1} = 0.8$$

Elke maand stuurt een beleggingsadviseur op basis van het model een bericht. Als de Markov keten die maand in toestand  $i$  is dan wordt een ‘positief’ bericht gestuurd met kans  $p_i$  en een negatief bericht met kans  $q_i = 1 - p_i$ ,  $i = 0, 1$ .

- (a) [2 pt.] Als de aantrekkelijkheid van het aandeel in januari in staat 0 is, wat is dan de kans dat er in mei een positief bericht wordt verstuurd?

- (b) [3 pt.] Welk deel van de berichten is op de lange termijn positief? Geef aan waarom de limietverdeling van de Markov keten bestaat en onafhankelijk is van de begintoestand.

### Opgave 3

Een professor geeft periodiek tentamens aan zijn studenten. Hij kan drie typen tentamens geven en de klas kan een tentamen goed of slecht maken. Laat  $p_i$  de kans zijn dat de klas een type  $i$  tentamen goed maakt en veronderstel dat  $p_1 = 0.3$ ,  $p_2 = 0.6$  en  $p_3 = 0.9$ . Als de klas een tentamen goed maakt dan wordt het volgende tentamen willekeurig gekozen uit elk van de drie typen. Als de klas het tentamen slecht maakt dan is het volgende tentamen altijd van type 1.

- (a) [3 pt.] Welk deel van de tentamens zijn type  $i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ?
- (b) [3 pt.] Als de professor ieder half jaar een tentamen geeft en het huidige tentamen is type 3, wat is dan de kans dat het meer dan een jaar duurt voordat de professor weer een type 1 tentamen geeft?

### Opgave 4

Een bedrijf is gespecialiseerd in de productie van speciale motoren. Klanten plaatsen orders voor motoren volgens een Poisson proces met intensiteit  $\lambda$ . Indien de productieafdeling bezig is met productie, dan komt een motor op de wachtlijst. Het bedrijf laat echter slechts één klant toe op de wachtlijst; nieuw arriverende klanten die een wachtlijst treffen gaan naar de concurrent. De productie van motoren heeft een exponentiële duur met intensiteit  $\mu_1$ , waarbij slechts één motor tegelijk kan worden geproduceerd. Na afloop van de productie wordt de motor uitvoerig getest door een testafdeling. De duur voor het testen is exponentieel verdeeld met intensiteit  $\mu_2$ . Tijdens het testen kunnen gewoon nieuwe motoren worden geproduceerd (dat is immers een andere afdeling). Wanneer een geproduceerde motor klaar is, maar de testafdeling is nog bezig met testen van een vorige motor, dan wordt het testen overgeslagen en de motor direct verkocht.

- (a) [2 pt.] Formuleer een geschikte continue-tijd Markov keten voor de bezetting van de verschillende afdelingen en wachtlijst en specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten.
- (b) [2 pt.] Stel de voorwaartse Kolmogorov vergelijkingen op (ga er hierbij vanuit dat het systeem leeg start). De vergelijkingen hoeven niet te worden opgelost.

- (c) [3 pt.] Stel dat  $\lambda = \mu_1 = \mu_2 = 1/2$  (de tijd is in weken). Als het systeem leeg start, wat is dan de verwachte tijd totdat voor het eerst beide afdelingen aan het werk zijn en de wachtlijst vol is? (Geef aan hoe u deze verwachting kunt bepalen en geef daarbij alle noodzakelijke formules en vergelijkingen. U hoeft eventuele vergelijkingen niet op te lossen.)