

VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
Faculteit der Exacte Wetenschappen, Afdeling Wiskunde
Tentamen STOCHASTISCHE PROCESSEN (401026)
op 16 februari 2012, 18.30 – 20.30 uur.

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Gebruik van het boek en grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Bij elk onderdeel staat tussen rechte haken vermeld hoeveel punten voor het onderdeel kunnen worden verkregen. Het tentamencijfer wordt gegeven door: $\# \text{ punten} / 3 + 1$.

‘Formuleblad’. Laat S_n een $\text{Erlang}(n, \mu)$ verdeling hebben. De verdeling van S_n is dan

$$\mathbb{P}(S_n \leq x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^k}{k!}.$$

Opgave 1. Een sportwinkel voert in de winter schaatsen in het assortiment. De verkoop van schaatsen hangt af van het weer. Wanneer het vriest dan volgen de verkopen een Poisson proces met intensiteit λ_v per dag en wanneer het dooit dan volgen de verkopen een Poisson proces met intensiteit λ_d per dag.

- (a) [2 pt.] Stel dat het vandaag en morgen dooit. Wat is de kans dat de komende 2 dagen er geen schaatsen worden verkocht?
- (b) [2 pt.] Stel dat het vandaag vriest. Wat is de kans dat er vandaag tenminste 3 paar schaatsen worden verkocht?
- (c) [2 pt.] Stel dat het de komende tijd alleen vriest en dat een concurrent schaatsen verkoopt met intensiteit 3 per dag wanneer het vriest. Wat is de kans dat de concurrent al minstens 2 paar schaatsen verkocht heeft voor de eerste verkoop bij de sportwinkel?

We nemen aan dat het weer (vriezen of dooien) van de volgende dag alleen afhangt van het weer van vandaag en niet van de dagen ervoor. Als het vandaag dooit, dan dooit het morgen met kans 0.9. Wanneer het vandaag vriest, dan vriest het morgen met kans p .

- (d) [2 pt.] Stel dat het vandaag dooit. Laat zien dat de kans dat de sportwinkel de komende 3 dagen geen schaatsen verkoopt gelijk is aan

$$(0.9)^2 e^{-3\lambda_d} + 0.1(1.9 - p)e^{-(2\lambda_d + \lambda_v)} + 0.1pe^{-(\lambda_d + 2\lambda_v)}.$$

Opgave 2. Binnen een bedrijf hanteert men een apart bonussysteem om goed presteren te belonen. Het presteren kan worden geclassificeerd als *goed* of *slecht*. Wanneer men drie jaar op rij goed presteert, wordt een bonus uitgekeerd. Als men dit jaar goed presteert, dan presteert men volgend jaar ook goed met kans 0.8, onafhankelijk van de jaren daarvoor. Als men dit jaar slecht presteert en vorig jaar goed, dan is de kans op goed presteren p_1 . Wanneer men al (tenminste) twee jaar op rij slecht presteert, dan is de kans op goed presteren p_2 .

- (a) [3 pt.] Formuleer een discrete-tijd Markov keten met absorberende toestanden die het verloop tot de eerste uitkering van de bonus beschrijft. Specificeer het toestandsdiagram en de 1-staps overgangskansen.

- (b) [3 pt.] Stel dat $p_1 = p_2$. Wat is het verwachte aantal jaar voordat de bonus wordt uitgekeerd als men dit jaar slecht presteert?

Opgave 3. Beschouw een discrete-tijd Markov keten $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ op de toestanden $\{1, 2, 3, 4\}$ en met de volgende matrix van overgangskansen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) [2 pt.] Teken het overgangsdiagram en bepaal de klassen van communicerende toestanden.
 (b) [2 pt.] Stel dat $X_0 = 1$. Bepaal de bijbehorende limietverdeling.
 (c) [2 pt.] Stel dat $X_0 = 3$. Wat is $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = i | X_0 = 3)$ voor alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$?

Opgave 4. In een kleine haven met een enkel losplatform worden schepen gelost. Schepen arriveren bij de haven volgens een Poisson proces met intensiteit λ . Wanneer er meer dan 2 schepen liggen (inclusief het schip bij het losplatform), dan worden schepen omgeleid naar een andere haven. Wanneer er precies 2 schepen liggen, dan wordt het arriverende schip met kans 0.4 naar een andere haven geleid en sluit het schip aan in de wachtrij met kans 0.6. In de andere situaties (0 of 1 aanwezige schepen) vaart het arriverende schip de haven binnen. Bij het losplatform kan slechts één schip tegelijk worden gelost. Het lossen duurt een exponentiële tijd met intensiteit μ . Vaar- en wisseltijden kunnen worden verwaarloosd.

- (a) [3 pt.] Formuleer een geschikte continue-tijd Markov keten en specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten.
 (b) [1 pt.] Geef aan waarom de limietverdeling van deze continue-tijd Markov keten bestaat en onafhankelijk is van de begintoestand.
 (c) [2 pt.] Bepaal de evenwichtsvergelijkingen en geef in detail aan hoe de evenwichtsverdeling hieruit bepaald kan worden (het exact bepalen hiervan is niet nodig).
 (d) [1 pt.] Stel dat een schip bij aankomst één ander schip aantreft bij het losplatform. Geef een uitdrukking voor de kans dat het langer dan t tijdseenheden duurt voordat het arriverende schip gelost is.