

VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
Faculteit der Exacte Wetenschappen, Afdeling Wiskunde
Tentamen STOCHASTISCHE PROCESSEN (401026)
op 14 januari 2010, 18.30 – 20.30 uur.

Dit tentamen bestaat uit 3 opgaven. Gebruik van het boek en grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Bij elk onderdeel staat tussen rechte haken vermeld hoeveel punten voor het onderdeel kunnen worden verkregen. Het tentamencijfer wordt gegeven door: $\# \text{ punten} / 3 + 1$.

Opgave 1. Bij een loket komen klanten aan volgens een Poisson proces met een intensiteit van λ per minuut. Van deze klanten is 60% vrouwelijk en 40% mannelijk.

- (a) [2 pt.] Wat is de kans dat de komende 10 minuten tenminste 3 klanten aankomen?
- (b) [2 pt.] Wat is de kans dat de komende 10 minuten geen mannelijke klant aankomt?
- (c) [2 pt.] De bedieningstijd van een klant aan het loket is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\mu$. Wat is de kans dat er gedurende één bediening tenminste 1 mannelijke klant aankomt?
- (d) [2 pt.] Wanneer de rij leeg is, neemt de loketbediende een korte pauze. De duur van de pauze is uniform verdeeld tussen 0 en 5 minuten. Laat zien dat de kans dat er geen klanten arriveren gedurende de korte pauze gelijk is aan

$$\frac{1}{5\lambda} (1 - e^{-5\lambda}).$$

Opgave 2. Beschouw een Markov keten op de toestanden $\{1, 2, 3, 4\}$ met de volgende matrix van overgangskansen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

- (a) [1 pt.] Bepaal de klassen van onderling communicerende toestanden.
- (b) [3 pt.] Bepaal de fractie tijd dat het proces in ieder van de toestanden verblijft.
- (c) [3 pt.] Wat is het verwachte aantal benodigde transitie om toestand 1 te bereiken, startend in toestand 3?
- (d) [3 pt.] We zijn geïnteresseerd in de kans dat toestand 1 niet bereikt wordt gedurende de eerste 10 transitie van de Markov keten, wanneer we starten in toestand 3. Geef aan hoe door het gebruik van absorberende toestanden deze kans bepaald kan worden. Geef hierbij in ieder geval de aangepaste 1-staps overgangskansen of overgangsmatrix en de benodigde berekeningen.

Opgave 3. In een bepaalde streek biedt een bedrijf twee typen transport aan; normaal vervoer en speciaal vervoer. De orders voor normaal en speciaal vervoer komen binnen volgens Poisson processen met respectievelijke parameters λ_N en λ_S . Het bedrijf heeft

twee type vrachtwagens. Met vrachtwagen A kan normaal én speciaal vervoer worden uitgevoerd, terwijl met vrachtwagen B alleen normaal vervoer mogelijk is. Een order voor speciaal vervoer gaat verloren wanneer vrachtwagen A bezet is. Een order voor normaal vervoer gaat alleen verloren wanneer beide vrachtwagens bezet zijn. Zijn beide vrachtwagens vrij, dan wordt het normale vervoer uitgevoerd door vrachtwagen B. Wanneer één van beide vrachtwagens vrij is, dan wordt het normale vervoer uitgevoerd door de vrije vrachtwagen. Het is niet mogelijk om tussentijds van vracht te wisselen. De transportduren van normaal en speciaal vervoer zijn beiden exponentieel verdeeld met parameter μ .

- (a) [1 pt.] Beargumenteer dat het totaal aantal orders aankomt volgens een Poisson proces en bepaal de bijbehorende parameter.
- (b) [3 pt.] Formuleer een geschikte continue-tijds Markov keten. Specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten en geef de evenwichtsvergelijkingen. Maak eventueel gebruik van het antwoord bij onderdeel (a).
- (c) [2 pt.] Vanwege veiligheidsmaatregelen wordt de transportduur van het speciaal vervoer verlengd. De transportduren van normaal en speciaal vervoer zijn nu exponentieel verdeeld met respectievelijke parameters μ_N en μ_S , ongeacht welke vrachtwagen het normale transport uitvoert. Formuleer opnieuw een geschikte continue-tijds Markov keten. Specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten.
- (d) [3 pt.] Ga uit van de situatie bij onderdeel (c) met verschillende transportduren voor normaal en speciaal vervoer. Vanwege onderhoud is vrachtwagen B buiten gebruik, zodat alleen vrachtwagen A het normale en speciale transport uitvoert. Een order gaat nu dus verloren wanneer vrachtwagen A bezet is. Geef de evenwichtsverdeling. Wat is de fractie tijd dat vrachtwagen A bezet is?