

VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM  
Faculteit der Exacte Wetenschappen, Afdeling Wiskunde  
Tentamen STOCHASTISCHE PROCESSEN (401026)  
op 22 oktober 2009, 15.15 – 17.15 uur.

Dit tentamen bestaat uit 3 opgaven. Bij elk onderdeel staat tussen rechte haken vermeld hoeveel punten voor het onderdeel kunnen worden verkregen. Het tentamencijfer wordt gegeven door: # punten/3 + 1.

**Opgave 1.** In een call center van een energiebedrijf zijn twee type telefonische vragen (ook wel calls) te onderscheiden; calls over persoonsgegevens en calls over facturen. Alle calls komen binnen op een centraal nummer. Het totaal aantal binnenkomende calls is Poisson verdeeld met een intensiteit van  $\lambda$  per minuut. Van dit totaal gaat 30% over persoonsgegevens en 70% over de factuur.

- (a) [2 pt.] Wat is de kans dat de komende 5 minuten tenminste 3 calls binnenkomen?
- (b) [2 pt.] Wat is de kans dat de komende 5 minuten geen call met een vraag over de persoonsgegevens binnenkomt?
- (c) [2 pt.] Laat zien dat de kans dat gedurende de *eerste* 5 minuten van de dag niet meer dan 1 call in totaal binnenkomt en gedurende de *eerste* 10 minuten van de dag tenminste twee calls arriveren gelijk is aan

$$e^{-5\lambda}(1 + 5\lambda) - e^{-10\lambda}(1 + 10\lambda).$$

- (d) [2 pt.] De medewerkers die vragen over facturen beantwoorden gaan een exponentieel verdeelde tijd, met intensiteit  $\mu$ , met pauze. Wat is de kans dat er gedurende deze pauze geen calls over facturen binnenkomen?

**Opgave 2.** In een productiesysteem zijn twee *identieke* productiemachines in serie geplaatst, die elk een deel van het productieproces uitvoeren. Voor de voortgang van het proces is slechts één machine nodig, al is de doorlooptijd aanzienlijk lager wanneer beide machines in gebruik zijn (in dat geval kunnen de machines ingesteld worden om slechts een bepaalde handeling routinematig uit te voeren). Aan het einde van de week worden beide machines geïnspecteerd. Ongeacht hoe lang de machines al in gebruik zijn leidt een inspectie met kans  $1/8$  per machine tot een onderhoudsbeurt. Een onderhoudsbeurt neemt precies twee weken in beslag. Wanneer één machine in onderhoud is, dan neemt de andere machine het gehele productieproces voor zijn rekening. De kans op een onderhoudsbeurt na een inspectie is ook in dit geval  $1/8$ .

- (a) [1 pt.] Stel dat beide machines aan het einde van de week in gebruik zijn. Wat is de kans dat beide machines na inspectie een onderhoudsbeurt ondergaan? Wat is de kans dat precies één machine na een inspectie een onderhoudsbeurt nodig heeft?
- (b) [3 pt.] Formuleer een discrete-tijd Markov keten voor dit productiesysteem en specificeer de 1-staps overgangskansen.
- (c) [3 pt.] Bepaal de evenwichtsvergelijkingen voor dit productiesysteem. Geef ook in detail aan hoe de evenwichtsverdeling gevonden kan worden (het exact bepalen hiervan is niet nodig). Wat is de fractie tijd dat het productieproces geheel stil ligt?

- (d) [3 pt.] Het bedrijf krijgt een onderhoudscontract aangeboden waarin het onderhoud van een productiemachine direct en ter plekke plaatsvindt. De tijd voor onderhoud kan daarmee worden verwaarloosd, terwijl de kans op een onderhoudsbeurt  $1/8$  blijft. In een testfase van 10 weken wordt dit contract aangegaan voor één machine. We zijn geïnteresseerd in de kans dat tijdens de testfase de betreffende machine drie opeenvolgende weken een onderhoudsbeurt nodig heeft. Gebruik een Markov keten met absorberende toestanden om deze kans te bepalen (een numeriek antwoord is hierbij niet nodig).

**Opgave 3.** Beschouw een Markov proces met toestandsruimte  $\{1, 2, 3\}$  en infinitesimale generator

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}$$

- (a) [1 pt.] Geef aan waarom de limietverdeling van dit Markov proces bestaat en onafhankelijk is van de begintoestand.
- (a) [3 pt.] Bepaal de evenwichtsverdeling van dit Markov proces.
- (b) [2 pt.] Bereken de verwachte *tijd* om vanuit toestand 1 in toestand 3 te komen.
- (d) [3 pt.] Geef de overgangsmatrix van de onderliggende Markov keten. Bepaal ook de evenwichtsverdeling. Kan de evenwichtsverdeling hier eenvoudig worden afgeleid (en zo ja, hoe)?