

VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
Faculteit der Exacte Wetenschappen, Afdeling Wiskunde
Tentamen WACHTRIJSYSTEMEN (401061)
op 17 december 2014, 15.15 – 17.15 uur.

Dit tentamen bestaat uit drie opgaven. Gebruik van het boek en grafische rekenmachine is niet toegestaan. Een formuleblad is te vinden aan het einde van het tentamen.

Bij elk onderdeel staat tussen rechte haken vermeld hoeveel punten voor het onderdeel kunnen worden verkregen. Het tentamencijfer wordt gegeven door: $\# \text{ punten} / 3 + 1$.

Opgave 1. Beschouw het volgende wachtrijsysteem. Potentiële klanten komen volgens een Poisson proces met intensiteit λ aan bij een wachtrijsysteem met twee bedienden. Wanneer er bij aankomst reeds $n \geq 2$ klanten in het systeem aanwezig zijn, dan sluit hij aan in de wachtrij met kans α_n (en vertrekt dus onmiddellijk met kans $1 - \alpha_n$). Neem aan dat de bedieningsduren exponentieel verdeeld zijn met intensiteit μ .

- (a) [2 pt.] Modelleer dit systeem als een geboorte-sterfte proces (specificeer hierbij de ‘birth rates’ en ‘death rates’).
- (b) [1 pt.] Stel dat $\alpha_n = p$. Voor welke waarden van p is dit systeem stabiel?
- (c) [3 pt.] Stel opnieuw dat $\alpha_n = p$. Laat p_j , $j \in \{2, 3, \dots\}$ de kans op j klanten in het systeem zijn in de evenwichtssituatie. Druk p_j , voor $j = 2, 3, \dots$ uit in termen van p_2 . Druk hiermee de kans op wachten Π_W uit in termen van p_2 .
- (d) [3 pt.] Stel dat $\alpha_n = 0$. Bepaal de evenwichtsverdeling van het aantal klanten in het systeem en bepaal de fractie klanten dat verloren gaat.

Opgave 2. Een Europese modeketen laat producten fabriceren in Zuidoost-Azië. Ieder schip vervoert 10.000 producten. Schepen vertrekken vanuit Zuidoost-Azië volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 2 per week.

- (a) [3 pt.] Stel dat vaartijden exponentieel verdeeld zijn met een gemiddelde vaartijd van 7 dagen. Formuleer een continue-tijd Markov keten voor het aantal producten onderweg en specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten.
- (b) [2 pt.] Stel dat de vaartijd exact 7 dagen is. Laat zien dat het aantal producten onderweg een Poisson verdeling heeft.

We beschouwen nu het aankomstproces van schepen in Europa.

- (c) [3 pt.] Stel dat de tussenaankomsttijden van schepen in Europa uniform verdeeld zijn tussen de 5 en 9 dagen. Op een willekeurig moment zit men in Europa zonder producten. Bepaal de kans dat binnen t dagen een schip met producten arriveert voor $t \leq 5$. Doe hetzelfde voor $t \in (5, 9]$.

Opgave 3. Beschouw een M/G/1 wachtrij met aankomstintensiteit λ . De bedieningsduur B bestaat uit een serie van twee opeenvolgende bewerkingen. Beide bewerkingen nemen een exponentieel verdeelde tijd in beslag, waarbij de verwachte bewerkingstijden f/μ en $(1-f)/\mu$ zijn voor bewerkingen 1 en 2, met $f \in [0, 1]$.

- (a) [2 pt.] Laat zien dat de verwachte bedieningsduur gelijk is aan $1/\mu$. Stel verder dat een klant op een willekeurig moment arriveert waarop een klant in bediening is. Laat zien dat de verwachte resterende bedieningsduur wordt gegeven door

$$\mathbb{E}[R] = \frac{1}{\mu}(1 - f + f^2).$$

- (b) [3 pt.] Neem aan dat $\lambda < \mu$. Bepaal de verwachte wachttijd $\mathbb{E}[W^q]$. Schets grafisch hoe de verwachte wachttijd zich gedraagt als functie van f . Kunt u dit gedrag verklaren? Motiveer het antwoord.
- (c) [2 pt.] Modelleer het aantal klanten in het systeem als een 2-dimensionale continue-tijd Markov keten. Geef het overgangsdiagram met de overgangsintensiteiten.

Om producten snel in bewerking te krijgen besluit men over te gaan naar een LCFS preemptive resume (LCFS-PR) discipline. Bedieningen worden dus onderbroken, ongeacht de fase waarin de huidige bediening zich bevindt.

- (d) [2 pt.] Beschouw een klant met een bedieningsduur van x , $x > 0$. Geef de aankomstrelatie en laat daarmee zien dat de verwachte verblijftijd van deze klant gelijk is aan $x/(1 - \rho)$ met $\rho = \lambda/\mu$.
- (e) [1 pt.] Stel dat $\lambda = 1/2$, $\mu = 1$ en $f = 0$. Voor welke klanten is de LCFS-PR gunstig ten op zichte van FCFS? Verklaar waarom dat zo is.

FORMULEBLAD

Erlang verdeling

Laat S_n een $\text{Erlang}(n, \mu)$ verdeling hebben. De staartkans van S_n is dan

$$P(S_n > t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!}.$$

M/M/c wachtrij

Kans op wachten Π_W , verwachte aantal wachtende klanten $E(L^q)$, verwachting en kansverdeling van wachttijd W^q en kansverdeling verblijftijd S

$$\begin{aligned}\Pi_W &= \frac{(c\rho)^c/c!}{(1-\rho) \sum_{i=0}^{c-1} (c\rho)^i/i! + (c\rho)^c/c!} \\ E(L^q) &= \Pi_W \frac{\rho}{1-\rho} \\ E(W^q) &= \Pi_W \frac{1}{c\mu(1-\rho)} \\ P(W^q > t) &= \Pi_W e^{-c\mu(1-\rho)t} \\ P(S > t) &= \frac{\Pi_W}{1-c(1-\rho)} e^{-c\mu(1-\rho)t} + \left(1 - \frac{\Pi_W}{1-c(1-\rho)}\right) e^{-\mu t}\end{aligned}$$

Relatie met Erlang-B:

$$\Pi_W = \frac{B(c, c\rho)}{1-\rho + \rho B(c, c\rho)}$$

M/G/1 wachtrij

Verwachte wachttijd W^q voor FCFS (Pollaczek-Khintchine)

$$\begin{aligned}E(W^q) &= \frac{\rho}{1-\rho} \frac{E(B^2)}{2E(B)} \\ &= \frac{1}{2}(1+c_B^2)E(B) \frac{\rho}{1-\rho}\end{aligned}$$

Verwachte duur busy period

$$E(BP) = \frac{E(B)}{1-\rho}$$

Resterende levensduur

Zij X de levensduur en R de resterende levensduur. Kansverdeling en verwachting van resterende duur R

$$\begin{aligned}P(R \leq x) &= \frac{1}{E(X)} \int_0^x P(X > y) dy \\ E(R) &= \frac{E(X^2)}{2E(X)}\end{aligned}$$