

VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
Faculteit der Exacte Wetenschappen, Afdeling Wiskunde
Tentamen WACHTRIJMDELLEN (401061)
op 16 februari 2012, 18.30 – 20.30 uur.

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Gebruik van het boek en grafische rekenmachine is niet toegestaan. Een formuleblad is te vinden aan het einde van het tentamen.

Bij elk onderdeel staat tussen rechte haken vermeld hoeveel punten voor het onderdeel kunnen worden verkregen. Het tentamencijfer wordt gegeven door: # punten/3 + 1.

Opgave 1. Beschouw een M/M/3/5 wachtrijsysteem: klanten arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit λ . De bedieningstijden zijn exponentieel verdeeld met intensiteit μ . Er zijn 3 bedienden en er is plaats voor maximaal 5 klanten in het systeem. Arriverende klanten die de wachtrij vol treffen worden geweigerd en gaan verloren.

- (a) [1 pt.] Voor welke waarden van λ en μ is dit systeem stabiel? Motiveer uw antwoord.
- (b) [4 pt.] Laat p_j de kans op j klanten in het systeem zijn in de evenwichtssituatie. Specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten. Druk p_j , voor $j \in \{1, \dots, 5\}$, uit in termen van p_0 en geef aan hoe p_0 kan worden bepaald.
- (c) [2 pt.] Stel dat een aankomende klant 3 klanten in het systeem treft (een lege wachtrij en alle bedienden bezet). Laat S de verblijftijd zijn van deze klant. Laat, door te conditioneren, zien dat

$$\mathbb{P}(S > t) = \frac{3}{2}e^{-\mu t} - \frac{1}{2}e^{-3\mu t}.$$

Opgave 2. Bij een nieuw opgeleverde parkeergarage komen voertuigen aan volgens een Poisson proces met intensiteit λ . De parkeertijden kunnen worden gemodelleerd door een exponentiële verdeling met verwachting $1/\mu$. Er is plaats voor c voertuigen. Wanneer alle parkeerplaatsen bezet zijn, dan wordt toegang geblokkeerd en sluiten arriverende auto's mogelijk aan in een wachtrij. Een aankomende auto besluit met kans $p \in [0, 1]$ plaats te nemen in de wachtrij, ongeacht de lengte van de wachtrij, en besluit met kans $1 - p$ op zoek te gaan naar een andere parkeermogelijkheid.

- (a) [2 pt.] Formuleer een geschikte continue-tijd Markov keten en specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten.
- (b) [1 pt.] Geef voor alle $p \in [0, 1]$ de stabiliteitsconditie.
- (c) [3 pt.] Stel dat $p = 0$. Met welke bekend wachtrijmodel correspondeert deze situatie? Wat is de kans dat een aankomende auto op zoek gaat naar een andere parkeermogelijkheid?

Opgave 3. Bij een productiesysteem arriveren orders volgens een Poisson proces met intensiteit $1/3$. De bewerkingstijd B van een order is als volgt opgebouwd. Iedere order ondergaat een eerste bewerking die exact gelijk is aan $2/(1+p)$ met $p \in [0, 1]$. Met kans p volgt een tweede bewerking die eveneens exact gelijk is aan $2/(1+p)$, waarna de bewerking is voltooid. Met kans $1 - p$ is de bewerking van een order na de eerste bewerking reeds voltooid.

- (a) [2 pt.] Laat zien dat de verwachte bewerkingstijd gelijk is aan 2 en het tweede moment van de bewerkingstijd gelijk is aan

$$\mathbb{E}[B^2] = \frac{4(3p+1)}{(1+p)^2}.$$

- (b) [3 pt.] Bepaal voor vaste $p \in [0, 1]$ de verwachte wachttijd $\mathbb{E}[W^q]$. Schets (grafisch) hoe de verwachte wachttijd $\mathbb{E}[W^q]$ zich gedraagt als functie van p voor $p \in [0, 1]$. Kunt u dit gedrag verklaren? Motiveer het antwoord.
- (c) [2 pt.] Stel dat $p = 1$. Laat zien dat de kansverdeling van de resterende bewerkingstijd R er als volgt uitziet, voor $0 \leq x \leq 2$,

$$\mathbb{P}(R \leq x) = \frac{x}{2}.$$

Kunt u dit verklaren?

Opgave 4. Bij een productielijn worden zowel jobs van hoge als lage prioriteit verwerkt. Men is vooral geïnteresseerd in de wachttijd van de zogenaamde hoge prioriteits jobs. Jobs van hoge en lage prioriteit komen aan volgens onafhankelijke Poisson processen met intensiteiten λ_1 en λ_2 . De verwerkingsduur van jobs van hoge en lage prioriteit volgen dezelfde kansverdeling met verwachting $\mathbb{E}[B]$. Jobs van hoge prioriteit hebben voorrang, maar wanneer de productie van een job van lage prioriteit is gestart, dan wordt deze niet onderbroken (non-preemptive).

- (a) [2 pt.] Neem aan dat $\lambda_1 + \lambda_2 < \mu$. Beredeneer dat de verwachte wachttijd van hoge prioriteits jobs $\mathbb{E}[W_1^q]$ en het verwachte aantal wachtende hoge prioriteits jobs $\mathbb{E}[L_1^q]$ gerelateerd zijn via

$$\mathbb{E}[W_1^q] = \mathbb{E}[L_1^q] \times \mathbb{E}[B] + (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbb{E}[B] \times \mathbb{E}[R],$$

waarbij R verdeeld is als de resterende verwerkingstijd van een job in verwerking als het systeem niet leeg is.

Neem voor het gemak aan dat de verwerkingsduur exponentieel verdeeld is met intensiteit μ .

- (b) [3 pt.] Leid uit onderdeel (a) een formule af voor de verwachte wachttijd $\mathbb{E}[W_1^q]$ voor jobs van hoge prioriteit. Bepaal hiermee ook de verwachte doorlooptijd (wachttijd plus verwerkingstijd) van jobs van hoge prioriteit en het totaal aantal verwachte jobs van hoge prioriteit in het systeem.
- (c) [2 pt.] Stel dat de jobs van hoge prioriteit in het vervolg op basis van LCFS worden verwerkt (maar zij hebben nog steeds voorrang op jobs van lage prioriteit). Beredeneer dat de aankomstrelatie voor de verwachte wachttijd van een arriverende job van hoge prioriteit er als volgt uitziet

$$\mathbb{E}[W_1^q] = \rho \times \mathbb{E}[R] + \rho \times \lambda_1 \mathbb{E}[R] \times \mathbb{E}[BP_1],$$

waarbij $\rho = (\lambda_1 + \lambda_2)/\mu$ en BP_1 is een stochastische variabele die de busy period weergeeft in een systeem met alleen hoge prioriteits jobs.

FORMULEBLAD

Erlang verdeling

Laat S_n een Erlang(n, μ) verdeling hebben. De staartkans van S_n is dan

$$P(S_n > t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!}.$$

M/M/c wachtrij

Kans op wachten Π_W , verwachte aantal wachtende klanten $E(L^q)$, verwachting en kansverdeling van wachttijd W^q en kansverdeling verblijftijd S

$$\begin{aligned}\Pi_W &= \frac{(c\rho)^c / c!}{(1-\rho) \sum_{i=0}^{c-1} (c\rho)^i / i! + (c\rho)^c / c!} \\ E(L^q) &= \Pi_W \frac{\rho}{1-\rho} \\ E(W^q) &= \Pi_W \frac{1}{c\mu(1-\rho)} \\ P(W^q > t) &= \Pi_W e^{-c\mu(1-\rho)t} \\ P(S > t) &= \frac{\Pi_W}{1-c(1-\rho)} e^{-c\mu(1-\rho)t} + \left(1 - \frac{\Pi_W}{1-c(1-\rho)}\right) e^{-\mu t}\end{aligned}$$

Relatie met Erlang-B:

$$\Pi_W = \frac{B(c, c\rho)}{1 - \rho + \rho B(c, c\rho)}$$

M/G/1 wachtrij

Verwachte wachttijd W^q voor FCFS (Pollaczek-Khintchine)

$$\begin{aligned}E(W^q) &= \frac{\rho}{1-\rho} \frac{E(B^2)}{2E(B)} \\ &= \frac{1}{2}(1 + c_B^2)E(B) \frac{\rho}{1-\rho}\end{aligned}$$

Verwachte duur busy period

$$E(BP) = \frac{E(B)}{1-\rho}$$

Resterende levensduur

Zij X de levensduur en R de resterende levensduur. Kansverdeling en verwachting van resterende duur R

$$\begin{aligned}P(R \leq x) &= \frac{1}{E(X)} \int_0^x P(X > y) dy \\ E(R) &= \frac{E(X^2)}{2E(X)}\end{aligned}$$