

Beknopte uitwerkingen tentamen WACHTRIJMODELLEN (401061)
op 19 december, 15.15 – 17.15 uur.

Uitwerkingen zijn altijd onder voorbehoud.

Opgave 1.

- (a) Definieer $X(t)$ = aantal klanten in het systeem op tijdstip t . Dan is $\{X(t), t \geq 0\}$ een continue-tijd Markov keten met overgangsintensiteiten $q_{i,i+1} = \lambda$ en $q_{i+1,i} = \mu$ voor $i = 0, 1, 2$ (teken overgangsdigram!).

Dit geeft de evenwichtsvergelijkingen $\lambda p_{i-1} = \mu p_i$, voor $i = 1, 2, 3$, ofwel

$$p_i = \frac{\lambda}{\mu} p_{i-1} = \rho p_{i-1} = \rho^i p_0,$$

met $\rho = \lambda/\mu$. Normalisatie geeft $p_0 = (1 - \rho)/(1 - \rho^4)$, waarmee

$$p_i = \rho^i \frac{1 - \rho}{1 - \rho^4}.$$

Het systeem is stabiel voor alle ρ (toestandsruimte eindig).

- (b) PASTA geeft $\pi_3 = p_3 = \rho^3(1 - \rho)/(1 - \rho^4)$.
(c) Conditioneren op het aantal wachtende klanten bij aankomst geeft

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W^q > t) &= \pi_1 e^{-\mu t} + \pi_2 (e^{-\mu t} + \mu t e^{-\mu t}) \\ &= e^{-\mu t} \frac{\rho(1 - \rho)}{1 - \rho^4} (1 + \rho + \rho \mu t), \end{aligned}$$

waarbij PASTA en het resultaat van (a) bij de 2e stap zijn gebruikt.

Opgave 2.

- (a) Bepalen verwachte bedieningsduur (bv. door te conditioneren)

$$\mathbb{E}B = p \times \left(1 + \frac{1}{p}\right) + (1 - p) \times 1 = 2.$$

Analoog geeft het 2e moment

$$\mathbb{E}B^2 = p \times \left(1 + \frac{1}{p}\right)^2 + (1 - p) \times 1^2 = 3 + \frac{1}{p}.$$

Dit geeft

$$\mathbb{E}R = \frac{\mathbb{E}B^2}{2\mathbb{E}B} = \frac{1}{4} \left(3 + \frac{1}{p}\right).$$

- (b) Stel $\lambda = 1/3$, dan $\rho = \lambda \mathbb{E}B = 2/3$. Gebruik PK geeft

$$\mathbb{E}W^q = \frac{\rho}{1 - \rho} \mathbb{E}R = \frac{2/3}{1 - 2/3} \times \frac{1}{4} \left(3 + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{p}\right).$$

Schets de grafiek! Merk op:

$p = 1$: $\mathbb{E}W^q = 2$, correspondeert met M/D/1 rij

$p \downarrow 0$: $\mathbb{E}W^q \rightarrow \infty$, kleine kans op extreem grote bedieningsduur (en dan wacht iedereen op deze extreem lange klant), wachtrij explodeert.

Opgave 3.

- (a) Little geeft
- $\mathbb{E}L = \lambda \mathbb{E}X = 4 \times b/2 = 2b$
- .

Het aantal bezette bedden komt overeen met het aantal klanten in een M/G/ ∞ model.

Hiermee heeft het aantal bezette bedden een Poisson verdeling (met parameter $2b$).

- (b) Gebruik kansverdeling resterende ligduur geeft

$$\mathbb{P}(R \leq x) = \frac{1}{\mathbb{E}X} \int_0^x \mathbb{P}(X > y) dy = \frac{2}{b} \int_0^x \left(1 - \frac{y}{b}\right) dy = \frac{x}{b} \times 2 \left(1 - \frac{x}{2b}\right).$$

- (c) Voor
- $x \in [0, b]$
- geldt dat
- $x/(2b) \leq 1/2$
- , waardoor

$$\mathbb{P}(R \leq x) = \frac{x}{b} \times 2 \left(1 - \frac{x}{2b}\right) \geq \frac{x}{b} = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Uniforme verdeling geeft willekeurig punt op *eindig* interval, waarmee resterende ‘levensduur’ kleiner is dan een gewone ‘levensduur’.

Opgave 4.

- (a) Systeem stabiel voor
- $(\lambda_1 + \lambda_2)/(2\mu) < 1$
- .

- (b) Merk op: (i) klanten type 1 zien type 2 niet, (ii) bij wachten functioneren 2 servers als één server met intensiteit
- 2μ
- , (iii) resterende bedieningsduren zijn ook exponentieel verdeeld.

Gebruiken Little $\mathbb{E}L_1^q = \lambda_1 \mathbb{E}W_1^q$ en herschrijven geeft

$$\mathbb{E}W_1^q = \Pi_W(\rho_1) \frac{1}{2\mu(1 - \rho_1)}.$$

- (c) Little geeft
- $\mathbb{E}L_1^q = \lambda_1 \mathbb{E}W_1^q = \Pi_W(\rho_1) \frac{\rho_1}{1 - \rho_1}$
- .

Totaal aantal wachtende klanten is onafhankelijk van discipline, dus gedraagt zich als een M/M/2 rij met verkeerslast $\rho_1 + \rho_2$, ofwel

$$\mathbb{E}L_1^q + \mathbb{E}L_2^q = \Pi_W(\rho_1 + \rho_2) \frac{\rho_1 + \rho_2}{1 - (\rho_1 + \rho_2)}.$$

Gebruiken van bovenstaande en gegeven uitdrukking Π_W geeft

$$\begin{aligned} \mathbb{E}L_2^q &= \Pi_W(\rho_1 + \rho_2) \frac{\rho_1 + \rho_2}{1 - (\rho_1 + \rho_2)} - \Pi_W(\rho_1) \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} \\ &= \frac{2(\rho_1 + \rho_2)^3}{1 - (\rho_1 + \rho_2)^2} - \frac{2\rho_1^3}{1 - \rho_1^2}. \end{aligned}$$

- (d) Gebruik Little
- $\mathbb{E}W_2^q = \mathbb{E}L_2^q/\lambda_2$
- en
- $\mathbb{E}S_2 = \mathbb{E}W_2^q + 1/\mu$
- geeft

$$\mathbb{E}S_2 = \frac{1}{\mu} + \frac{2(\rho_1 + \rho_2)^3}{\lambda_2(1 - (\rho_1 + \rho_2)^2)} - \frac{2\rho_1^3}{\lambda_2(1 - \rho_1^2)}.$$

Opmerking: Uitdrukking vereenvoudigbaar (niet nodig voor deze opgave).