

VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
Faculteit der Exacte Wetenschappen, Afdeling Wiskunde
Tentamen WACHTRIJSYSTEMEN (401061)
op 19 december 2011, 15.15 – 17.15 uur.

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Gebruik van het boek en grafische rekenmachine is niet toegestaan. Een formuleblad is te vinden aan het einde van het tentamen.

Bij elk onderdeel staat tussen rechte haken vermeld hoeveel punten voor het onderdeel kunnen worden verkregen. Het tentamencijfer wordt gegeven door: $\# \text{ punten} / 3 + 1$.

Opgave 1. Beschouw een M/M/1/3 wachtrijstelsel: klanten arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit λ . De bedieningstijden zijn exponentieel verdeeld met intensiteit μ . Er is 1 bediende en er is plaats voor maximaal 3 klanten in het systeem. Arriverende klanten die de wachtrij vol treffen worden geweigerd en gaan verloren.

- (a) [5 pt.] Formuleer een continue-tijd Markov keten en specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten. Bepaal hiermee de evenwichtsverdeling. Voor welke waarden van λ en μ is dit systeem stabiel? Motiveer uw antwoord.
- (b) [1 pt.] Wat is de fractie klanten die geweigerd worden?
- (c) [2 pt.] Bepaal de kans dat een arriverende klant langer dan t tijdseenheden moet wachten door te conditioneren op de toestand die de klant aantreft.

Opgave 2. Beschouw een M/G/1 rij met aankomstintensiteit λ . De bedieningsduur is met kans p exact gelijk aan $1 + \frac{1}{p}$ en met kans $1 - p$ exact gelijk aan 1, waarbij $p \in (0, 1]$.

- (a) [2 pt.] Stel dat een klant op een willekeurig moment arriveert waarop een andere klant in bediening is. Laat zien dat de verwachte resterende bedieningsduur wordt gegeven door

$$\mathbb{E}[R] = \frac{1}{4} \left(3 + \frac{1}{p} \right).$$

- (b) [3 pt.] Stel dat $\lambda = \frac{1}{3}$. Bepaal voor vaste $p \in (0, 1]$ de verwachte wachttijd $\mathbb{E}[W^q]$. Schets (grafisch) hoe de verwachte wachttijd $\mathbb{E}[W^q]$ zich gedraagt als functie van p voor $p \in (0, 1]$. Kunt u dit gedrag verklaren? Motiveer het antwoord.

Opgave 3. De vakgroep Orthopedie van een ziekenhuis is in overleg over het aantal benodigde bedden. Voor een beter inzicht wil de vakgroep eerst bepalen wat de vraag naar bedden is. Uit data-analyses blijkt dat patiënten aankomen volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 4 per dag. Voor de ligduur X neemt men aan dat deze uniform verdeeld is op $[0, b]$ met $b > 0$.

- (a) [3 pt.] Wat is de gemiddelde vraag naar bedden? Met welk bekend wachtrijmodel correspondeert het aantal bezette bedden? Welke kansverdeling heeft het aantal bezette bedden hiermee? Motiveer uw antwoord.
- (b) [2 pt.] Een arts komt op een willekeurig moment bij het bed van een patiënt en is geïnteresseerd in de resterende ligduur. Laat voor $x \in [0, b]$ zien dat de kansverdeling van de resterende ligduur als volgt gegeven wordt

$$\mathbb{P}(R \leq x) = \frac{x}{b} \times 2 \left(1 - \frac{x}{2b} \right).$$

- (c) [2 pt.] Laat zien dat $\mathbb{P}(R \leq x) \geq \mathbb{P}(X \leq x)$. Kunt u dit verklaren?

Opgave 4. Bij een digitaal service systeem met 2 servers arriveren twee type klanten, aangegeven met 1 en 2. Klanten van type 1 en 2 arriveren volgens onafhankelijke Poisson processen met intensiteiten λ_1 en λ_2 . De bedieningsduur van een klant is exponentieel verdeeld met intensiteit μ , ongeacht het type. Klanten van type 1 hebben prioriteit, waarbij een eventuele bediening van type 2 (bij één van de twee servers) wordt onderbroken (preemptive resume).

Gegeven is dat de kans op wachten voor een M/M/2 rij met verkeerslast ρ per bediende wordt gegeven door

$$\Pi_W(\rho) = \frac{2\rho^2}{1 + \rho}.$$

- (a) [1 pt.] Voor welke waarden van λ_1 , λ_2 en μ is de rijlengte van type 2 stabiel?
- (b) [2 pt.] Neem aan dat het systeem stabiel is. Beredeneer dat de verwachte wachttijd $\mathbb{E}[W_1^q]$ van type 1 en het verwachte aantal wachtende klanten $\mathbb{E}[L_1^q]$ van type 1 gerelateerd zijn via

$$\mathbb{E}[W_1^q] = \mathbb{E}[L_1^q]/(2\mu) + \Pi_W(\rho_1)/(2\mu).$$

Bepaal hiermee de verwachte wachttijd van type 1 $\mathbb{E}[W_1^q]$ in termen van $\Pi_W(\rho_1)$.

- (c) [3 pt.] Bepaal het verwachte aantal wachtende klanten van type 1 $\mathbb{E}[L_1^q]$ en het totaal aantal wachtende klanten $\mathbb{E}[L_1^q] + \mathbb{E}[L_2^q]$. Laat daarmee zien dat voor het verwachte aantal wachtende klanten van type 2 geldt

$$\mathbb{E}[L_2^q] = \frac{2(\rho_1 + \rho_2)^3}{1 - (\rho_1 + \rho_2)^2} - \frac{2\rho_1^3}{1 - \rho_1^2},$$

met $\rho_i = \lambda_i/(2\mu)$.

- (d) [1 pt.] Bepaal de verwachte verblijftijd van klanten van type 2.

FORMULEBLAD

Erlang verdeling

Laat S_n een $\text{Erlang}(n, \mu)$ verdeling hebben. De staartkans van S_n is dan

$$P(S_n > t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!}.$$

M/M/c wachtrij

Kans op wachten Π_W , verwachte aantal wachtende klanten $E(L^q)$, verwachting en kansverdeling van wachttijd W^q en kansverdeling verblijftijd S

$$\begin{aligned}\Pi_W &= \frac{(c\rho)^c/c!}{(1-\rho) \sum_{i=0}^{c-1} (c\rho)^i/i! + (c\rho)^c/c!} \\ E(L^q) &= \Pi_W \frac{\rho}{1-\rho} \\ E(W^q) &= \Pi_W \frac{1}{c\mu(1-\rho)} \\ P(W^q > t) &= \Pi_W e^{-c\mu(1-\rho)t} \\ P(S > t) &= \frac{\Pi_W}{1-c(1-\rho)} e^{-c\mu(1-\rho)t} + \left(1 - \frac{\Pi_W}{1-c(1-\rho)}\right) e^{-\mu t}\end{aligned}$$

Relatie met Erlang-B:

$$\Pi_W = \frac{B(c, c\rho)}{1-\rho + \rho B(c, c\rho)}$$

M/G/1 wachtrij

Verwachte wachttijd W^q voor FCFS (Pollaczek-Khintchine)

$$\begin{aligned}E(W^q) &= \frac{\rho}{1-\rho} \frac{E(B^2)}{2E(B)} \\ &= \frac{1}{2}(1+c_B^2)E(B) \frac{\rho}{1-\rho}\end{aligned}$$

Verwachte duur busy period

$$E(BP) = \frac{E(B)}{1-\rho}$$

Resterende levensduur

Zij X de levensduur en R de resterende levensduur. Kansverdeling en verwachting van resterende duur R

$$\begin{aligned}P(R \leq x) &= \frac{1}{E(X)} \int_0^x P(X > y) dy \\ E(R) &= \frac{E(X^2)}{2E(X)}\end{aligned}$$