

Beknopte uitwerkingen tentamen WACHTRIJMODELLEN (401061)
op 25 maart 2011, 8.45 – 10.45 uur.

Uitwerkingen zijn altijd onder voorbehoud.

Opgave 1.

- (a) Definieer $X(t)$ = aantal werkende machines op tijdstip t . Dan is $\{X(t), t \geq 0\}$ een continue-tijd Markov keten met overgangsintensiteiten $q_{i,i+1} = \lambda$ voor $i = 0, \dots, K-1$ en $q_{i,i-1} = i\mu$ voor $i = 1, \dots, K$ (teken overgangsdiaagram!). Met behulp van Erlang B model volgt dat de kans dat alle machines werken gelijk is aan

$$p_K = \frac{(\lambda/\mu)^K / K!}{\sum_{i=0}^K (\lambda/\mu)^i / i!}.$$

- (b) Erlang B model is *ongevoelig* voor bedieningsduur, dus kans dat alle machines werken blijft gelijk. Vanwege PASTA (en ongevoeligheid) volgt dat fractie verloren orders

$$\pi_0 = p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^K (\lambda/\mu)^i / i!}.$$

- (c) Verwachte resterende levensduur van een machine is

$$\mathbb{E}R = \frac{1}{2} (1 + c_B^2) \mathbb{E}B = \frac{1}{2\mu} (1 + (\sigma\mu)^2).$$

Opgave 2.

- (a) Stabiel voor $\lambda/(3\mu) < 1$.
(b) Overgangsintensiteiten $q_{j,j+1} = \lambda$ voor $j = 0, 1, \dots$, $q_{j,j-1} = j\mu$ voor $j = 1, 2, 3$ en $q_{j,j-1} = 3\mu$ voor $j = 3, \dots$ (teken overgangsdiaagram!). Voor $j = 3, \dots$ geldt $\lambda p_{3+j-1} = 3\mu p_{3+j}$, ofwel

$$p_{j+3} = \frac{\lambda}{3\mu} p_{3+j-1} = \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^j p_3 = \rho^j p_3,$$

met $\rho = \lambda/(3\mu)$.

Voor de kans op wachten geldt, vanwege PASTA,

$$\Pi_W = \sum_{j=3}^{\infty} p_j = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i p_3 = \frac{p_3}{1 - \rho}.$$

- (c) Little geeft

$$\mathbb{E}W^q = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}L^q = \Pi_W \frac{1}{3\mu(1 - \rho)}.$$

Verder

$$\mathbb{E}W = \mathbb{E}W^q + \frac{1}{\mu} = \Pi_W \frac{1}{3\mu(1 - \rho)} + \frac{1}{\mu}.$$

Opnieuw Little geeft

$$\mathbb{E}L = \lambda \mathbb{E}W = \Pi_W \frac{\rho}{1 - \rho} + \frac{\lambda}{\mu}.$$

- (d) Bij aankomst 5 klanten, dus 3 bedieningsaflopen nodig, ofwel $W^q \sim X_1 + X_2 + X_3$ met $X_i \sim \text{Exp}(3\mu)$. Dit geeft dat de wachttijd een Erlang verdeling heeft met parameters 3 en 3μ .

Opgave 3.

- (a) Gebruik dat bedieningsduur $\text{Exp}((1+a)/2)$ met kans $(1+a)/2$ en $\text{Exp}((1-a)/2)$ met kans $(1-a)/2$. Dit geeft

$$\mathbb{E}B = \frac{1+a}{2} \times \frac{2}{1+a} + \frac{1-a}{2} \times \frac{2}{1-a} = 2.$$

Analoog geeft het 2e moment (na enig herschrijven)

$$\mathbb{E}B^2 = \frac{1+a}{2} \times 2 \left(\frac{2}{1+a} \right)^2 + \frac{1-a}{2} \times 2 \left(\frac{2}{1-a} \right)^2 = \frac{8}{1-a^2}.$$

- (b) Merk op dat $\rho = \lambda \mathbb{E}B = 2/3$. Gebruik van PK geeft

$$\mathbb{E}W^q = \frac{\rho}{1-\rho} \frac{\mathbb{E}B^2}{2\mathbb{E}B} = \frac{2/3}{1-2/3} \frac{8/(1-a^2)}{2 \times 2} = \frac{4}{1-a^2}.$$

- (c) De waarden $a = 0$, $a = \sqrt{1/2}$ en $a = \sqrt{3/4}$ geven $\mathbb{E}[W^q]$ is 4, 8 en 16. Wanneer $a \rightarrow 1$ dan $\mathbb{E}[W^q] \rightarrow \infty$. Wanneer a groter wordt, dan is er meer spreiding in bedieningsduren. Voor a dichtbij 1 zijn er veel kleine klanten, maar enkele hele grote, welke de wachttijd opblazen.

Opgave 4.

- (a) Stabiliteit systeem voor $\rho_1 + \rho_2 < 1$.
 (b) Laat BP_1 een busy period zijn van een M/M/1 rij met alleen orders van type 1 (snel). De aankomstrelatie voor de verwachte wachttijd van een arriverende snelorder onder een LCFS non-preemptive bedieningsdiscipline is dan

$$\mathbb{E}W_1^q = (\rho_1 + \rho_2) \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} \times \lambda_1 \times \mathbb{E}BP_1 \right).$$

Gebruiken dat $\mathbb{E}BP_1 = \mathbb{E}B/(1-\rho_1)$ met $\mathbb{E}B = 1/\mu$ en herschrijven geeft

$$\mathbb{E}W_1^q = (\rho_1 + \rho_2) \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \right) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\mu(1-\rho_1)}.$$