

VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
Faculteit der Exacte Wetenschappen, Afdeling Wiskunde
Tentamen WACHTRIJSYSTEMEN (401061)
op 25 maart 2011, 8.45 – 10.45 uur.

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Gebruik van het boek en grafische rekenmachine is niet toegestaan. Een formuleblad is te vinden aan het einde van het tentamen.

Bij elk onderdeel staat tussen rechte haken vermeld hoeveel punten voor het onderdeel kunnen worden verkregen. Het tentamencijfer wordt gegeven door: $\# \text{ punten} / 3 + 1$.

Opgave 1. In een machinepark zijn K machines in parallel geschakeld die allen defect kunnen raken. Iedere machine werkt een exponentieel verdeelde tijd met intensiteit μ , onafhankelijk van de toestand van de andere machines. Defecte machines worden gerepareerd bij een reparatiefaciliteit. Hier is altijd precies één reparateur. De duur van een reparatie is exponentieel verdeeld met intensiteit λ . Wanneer de reparateur bezet is, nemen de machines plaats in een wachtrij en worden de machines op volgorde waarin ze defect zijn geraakt gerepareerd.

- (a) [3 pt.] Formuleer een geschikte continue-tijd Markov keten en specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten. Geef de kans dat alle machines werken.

Stel nu dat de duur dat een machine werkt niet een exponentiële verdeling heeft, maar een algemene verdeling met verwachting $1/\mu$ en variantie σ^2 .

- (b) [2 pt.] Wat is nu de kans dat alle machines werken? Wanneer alle machines defect zijn gaan arriverende orders verloren, waarbij orders arriveren volgens een Poisson proces. Wat is de fractie orders dat verloren gaat?

Hint: beschouw het toestandsdiagram van vraag (a).

- (c) [2 pt.] Stel dat u op een willekeurig moment aankomt waarop machine 1 werkt. Bepaal de verwachte resterende levensduur van machine 1 in termen van μ en σ .

Opgave 2. Beschouw een M/M/3 wachtrijsysteem: klanten arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit λ . De bedieningstijden zijn exponentieel verdeeld met intensiteit μ . Er zijn 3 bedienden en arriverende klanten die alle bedienden bezet treffen nemen plaats in een wachtrij en worden geholpen in volgorde van aankomst.

- (a) [1 pt.] Voor welke waarden van λ en μ is dit systeem stabiel?
- (b) [5 pt.] Laat p_j de kans op j klanten in het systeem zijn in de evenwichtssituatie. Specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten. Druk p_j , voor $j = 3, 4, \dots$ uit in termen van p_3 . Druk hiermee ook de kans op wachten Π_W uit in termen van p_3 .
- (c) [2 pt.] Het verwachte aantal klanten in de wachtrij kan als volgt worden uitgedrukt in termen van Π_W en $\rho = \lambda/(3\mu)$:

$$\mathbb{E}[L^q] = \Pi_W \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

Bepaal hiermee de verwachte wachttijd, de verwachte verblijftijd en het verwachte aantal klanten in het systeem.

- (d) [2 pt.] Stel dat u bij aankomst 5 klanten in het systeem aantreft. Beargumenteer wat de wachttijdverdeling is.

Opgave 3. Beschouw een M/G/1 wachtrij met aankomstintensiteit $\lambda = \frac{1}{3}$ en met de volgende hyperexponentiële bedieningsduurverdeling:

$$\mathbb{P}(B < x) = \frac{1+a}{2} \left(1 - e^{-\frac{1+a}{2}x}\right) + \frac{1-a}{2} \left(1 - e^{-\frac{1-a}{2}x}\right), \quad x \geq 0,$$

waarbij $0 \leq a < 1$.

- (a) [2 pt.] Laat zien dat de verwachte bedieningsduur gelijk is aan 2 en het tweede moment van de bedieningsduur gelijk is aan

$$\mathbb{E}[B^2] = \frac{8}{1-a^2}.$$

- (b) [2 pt.] Laat zien dat de verwachte wachttijd W^q als volgt wordt gegeven

$$\mathbb{E}[W^q] = \frac{4}{1-a^2}.$$

- (c) [2 pt.] Bepaal $\mathbb{E}[W^q]$ voor $a = 0$, $a = \sqrt{1/2}$ en $a = \sqrt{3/4}$. Wat gebeurt er wanneer $a \rightarrow 1$? Kunt u de verschillen intuïtief verklaren?

Opgave 4. Bij een productielijn komen twee type orders binnen: spoed en reguliere orders. Spoed en reguliere orders worden gegenereerd volgens onafhankelijke Poisson processen met intensiteiten λ_1 en λ_2 . De verwerkingsduur van een order heeft een exponentiële verdeling met intensiteit μ , ongeacht het type. Spoed orders hebben prioriteit, maar wanneer de productie van een reguliere order is gestart wordt deze niet onderbroken (non-preemptive). Verder worden wachtende spoedorders op basis van de LCFS non-preemptive bedieningsdiscipline weggewerkt. Definieer zonodig $\rho_i = \lambda_i/\mu$, $i = 1, 2$.

- (a) [1 pt.] Wanneer is het systeem stabiel (voor spoed en reguliere orders)?
 (b) [3 pt.] Geef de aankomstrelatie voor de verwachte wachttijd van een arriverende spoedorder. Bepaal daarmee de verwachte wachttijd van spoedorders.

FORMULEBLAD

M/M/c wachtrij

Kans op wachten Π_W , verwachting en kansverdeling van wachttijd W^q en kansverdeling verblijftijd S

$$\begin{aligned}\Pi_W &= \frac{(c\rho)^c/c!}{(1-\rho)\sum_{i=0}^{c-1}(c\rho)^i/i! + (c\rho)^c/c!} \\ E(W^q) &= \Pi_W \frac{1}{c\mu(1-\rho)} \\ P(W^q > t) &= \Pi_W e^{-c\mu(1-\rho)t} \\ P(S > t) &= \frac{\Pi_W}{1-c(1-\rho)} e^{-c\mu(1-\rho)t} + \left(1 - \frac{\Pi_W}{1-c(1-\rho)}\right) e^{-\mu t}\end{aligned}$$

Relatie met Erlang-B:

$$\Pi_W = \frac{B(c, c\rho)}{1-\rho + \rho B(c, c\rho)}$$

M/G/1 wachtrij

Verwachte wachttijd W^q voor FCFS (Pollaczek-Khinchine)

$$\begin{aligned}E(W^q) &= \frac{\rho}{1-\rho} \frac{E(B^2)}{2E(B)} \\ &= \frac{1}{2}(1+c_B^2)E(B)\frac{\rho}{1-\rho}\end{aligned}$$

Verwachte duur busy period

$$E(BP) = \frac{E(B)}{1-\rho}$$

Resterende levensduur

Zij X de levensduur en R de resterende levensduur. Kansverdeling en verwachting van resterende duur R

$$\begin{aligned}P(R \leq x) &= \frac{1}{E(X)} \int_0^x P(X > y) dy \\ E(R) &= \frac{E(X^2)}{2E(X)}\end{aligned}$$