

- Gebruik van een (niet-grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Cijfer = $\frac{\text{totaal} + 4}{4}$
- Noteer duidelijk uw studierichting op uw uitwerking.
- Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau FEW.

SUCCES!

Opgave 1 [6 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de $\mathcal{N}(0, 1/\theta)$ -verdeling met dichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\theta x^2}$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is. We nemen als a priori dichtheid voor θ de Gamma(α, λ) dichtheid met $\alpha, \lambda > 0$ bekend (zie Bijlage 1).

- [3 punten] Bepaal de a posteriori dichtheid voor θ op basis van de steekproef $X_1, \dots, X_n$. Van welke verdeling is dit de dichtheid?
- [3 punten] Bepaal de Bayes-schatter voor θ^2 (let op: niet voor θ).

Opgave 2 [10 punten]

Fabrikant Koekoek maakt ontbijtkoek in verpakkingen waarop staat dat er 600 gram in zit. Koekoek zegt dat zij haar vulmachine zo afstelt dat er in minimaal 95 % van de koekverpakkingen minstens 600 gram zit. Daarmee laat de fabrikant toe dat er in maximaal 5 % van de verpakkingen minder koek zit dan de aangegeven 600 gram. Op de vulmachine kan het gemiddelde μ worden ingesteld. De standaardafwijking van de vulmachine is bekend: $\sigma = 1.54$. Men mag uitgaan van normaal verdeelde gewichten.

- [2 punten] Laat zien dat Koekoek $\mu \geq 602.5$ moet instellen als gemiddelde van de vulmachine om in minstens 95 % van de verpakkingen de genoemde 600 gram te krijgen.

We kopen 14 Koekoek ontbijtkoeken en meten de gewichten van de koeken. We willen vervolgens toetsen of Koekoek wel genoeg koek in de verpakking stopt, dat wil zeggen of Koekoek zich houdt aan de minimale instelling in onderdeel (a). We meten $\bar{x} = 601.4$.

- [1 punt] Geef een passend statistisch model voor deze situatie en formuleer een geschikte nulhypothese.

- c. [3 punten] Toets de hypothese uit onderdeel (b) bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van $\alpha_0 = 0.05$. Vermeld daarbij
- i.) de toetsingsgrootheid
 - ii.) welke aannames u maakt
 - iii.) de verdeling van de toetsingsgrootheid onder de (rand van de) nulhypothese
 - iv.) het kritieke gebied of de overschrijdingskans (p -waarde)
 - v.) de conclusie van de toets.
- d. [2 punten] Bepaal een betrouwbaarheidsinterval voor μ met onbetrouwbaarheid 0.10.
- e. [2 punten] De toets in onderdeel (c) kan ook uitgevoerd worden met het antwoord uit onderdeel (d). Geef aan hoe dat moet. Is de verschillende waarde van onbetrouwbaarheid – 0.05 bij (c) en 0.10 bij (d) – hierbij een probleem of juist niet? Motiveer uw antwoord.

Opgave 3 [8 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \theta^2 x e^{-\theta x} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- a. [3 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor θ .
- b. [3 punten] Bepaal de likelihood-ratiostatistiek $\lambda_n(X)$ voor het toetsen van de nulhypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ tegen de alternatieve hypothese $H_1 : \theta \neq \theta_0$ met $\theta_0 > 0$.
- c. [2 punten] Geef het kritieke gebied voor de likelihood-ratiotoets voor de nulhypothese uit (b) bij onbetrouwbaarheidsdrempel α_0 . Motiveer uw antwoord. (*Let op: er wordt geen betrouwbaarheidsgebied gevraagd!*)

Opgave 4 [12 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de Poisson(θ)-verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta} \quad x \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- a. [3 punten] Bepaal een voldoende en volledige statistiek.
- b. [2 punten] Bepaal een UMVZ schatter voor θ .
- c. [3 punten] Bepaal de Fisher-informatie i_θ .
- d. [2 punten] Bepaal de Cramér-Rao ondergrens voor de variantie van een zuivere schatter voor θ . Is deze ondergrens hier scherp? (*Indien u geen antwoord bij (c) hebt gevonden, neem dan aan dat $i_\theta = 1/\theta$.*)
- e. [2 punten] Bepaal een UMVZ schatter voor θ^2 .

Bijlage 1: Gamma-verdeling

Een stochastische grootheid X die $\Gamma(\alpha, \lambda)$ -verdeeld is heeft de volgende dichtheid:

$$f_{\alpha, \lambda}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \lambda^\alpha e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$$

met $\alpha, \lambda > 0$, waar de Gamma-functie als volgt gedefinieerd is:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

met de eigenschap $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$. De verwachtingswaarde en variantie zijn gelijk aan $E_{\alpha, \lambda} X = \alpha/\lambda$ en $\text{var}_{\alpha, \lambda} X = \alpha/\lambda^2$.

Bijlage 2: Tabel normale verdeling

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999
3.1	0.999	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Table 1: Verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling op het interval $[0, 4]$. De waarde in de tabel is $\Phi(x)$ voor $x = a + b/100$ met a de waarde in de eerste kolom en b het getal in de eerste rij.