

- **Gebruik van een (niet-grafische) rekenmachine is toegestaan.**
- Geheel tentamen: **opgaven 1,2,3,4.** Cijfer = $\frac{\text{totaal}+4}{4}$
- Deeltentamen 2: **opgaven 3,4,5.** Cijfer = $\frac{\text{totaal}+3}{3}$
- **Noteer duidelijk uw studierichting op uw uitwerking.**
- Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau FEW.

SUCCES!

Opgave 1 [6 punten] Alleen voor gehele tentamen

- [2 punten] Geef de definitie (in formules of woorden) van een overschrijdingskans (p -waarde) en leg uit waar deze voor wordt gebruikt.
- [2 punten] Wanneer van twee toetsen K_1 en K_2 de eerste een hoger onderscheidend vermogen heeft $\pi(\theta; K_1) > \pi(\theta; K_2)$ voor alle $\theta \in \Theta$, verdient toets K_1 dan de voorkeur boven toets K_2 ? Beargumenteer uw antwoord.
- [2 punten] Geef de definitie van de likelihood-ratiostatistiek $\lambda(X)$. Als men een toets baseert op deze statistiek, verworpt men de nulhypothese dan voor kleine of grote waarden van $\lambda(X)$, of voor beide? Motiveer uw antwoord.

Opgave 2 [9 punten] Alleen voor gehele tentamen

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de verdeling met dichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{3\theta^3}{x^4} \mathbf{1}_{x \geq \theta}$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- [3 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor θ op basis van de steekproef.
- [4 punten] Bepaal de MSE van de schatters $\bar{X}$ en $2\bar{X}/3$ voor θ .
- [2 punten] Aan welke van de schatters $\bar{X}$ en $2\bar{X}/3$ voor θ geeft u de voorkeur? Motiveer uw keuze.
(Indien u geen antwoord bij (b) hebt gevonden, neem dan aan dat $\text{MSE}(\theta; \bar{X}) = 2\theta^2/n$ en $\text{MSE}(\theta; 2\bar{X}/3) = \theta^2(1/n + 3/4)$.)

Opgave 3 [9 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de verdeling met dichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- [3 punten] Bepaal de verdelingsfunctie voor $X_{(n)}$.
- [1 punt] Geef de algemene definitie van een pivot.
- [3 punten] Laat zien dat $T = X_{(n)}/\theta$ een pivot is. (*Indien u geen antwoord bij (a) hebt gevonden, neem dan aan dat $P(X_{(n)} \leq u) = u^n/\theta^n$.*)
- [2 punten] Geef aan hoe een 95% betrouwbaarheidsinterval voor θ gebaseerd op T kan worden bepaald.

Opgave 4 [12 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de geometrische verdeling met parameter $\theta \in (0, 1)$

$$p_\theta(x) = \theta(1 - \theta)^{x-1}, \quad x \in \{1, 2, \dots\}.$$

Voor deze verdeling geldt $E_\theta X_1 = 1/\theta$ en $\text{var}_\theta X_1 = (1 - \theta)/\theta^2$.

- [3 punten] Bepaal een voldoende en volledige statistiek.
- [3 punten] Bepaal een UMVZ schatter voor $1/\theta$.
- [3 punten] Bepaal de Fisher-informatie i_θ .
- [3 punten] Bepaal de Cramér-Rao ondergrens voor de variantie van een zuivere schatter voor $1/\theta$ en laat zien dat deze ondergrens hier scherp is.

Opgave 5 [6 punten] **Alleen voor deeltentamen 2**

ING heeft in een Europees onderzoek, uitgevoerd door Ipsos, de uitgaven van consumenten onderzocht ten aanzien van hun Kerst en Oud & Nieuw inkopen. Nederland staat onderaan de lijst met een gemiddelde kerstuitgave van € 25. Ter vergelijking, in de UK wordt gemiddeld maar liefst € 440 uitgegeven. We willen onderzoeken of Nederlanders dit jaar meer geld uitgeven aan kerstcadeaus dan vorig jaar. Vorig jaar hebben we aan 15 mensen gevraagd wat ze uitgeven aan kerstcadeaus. De samenvatting van deze data, $X_1, \dots, X_{15}$, is $\bar{x} = € 22.73$ en $s_x = € 3.26$. Dit jaar hebben we 17 mensen dezelfde vraag gesteld. De uitkomsten van deze enquête, $Y_1, \dots, Y_{17}$, kunnen worden samengevat als $\bar{y} = € 24.58$ en $s_y = € 3.34$.

- [2 punten] Formuleer voor deze situatie een geschikt statistisch model en een geschikte nul- en alternatieve hypothese.
- [4 punten] Toets de nulhypothese uit (a) bij een onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$ (zie Bijlagen 1 en 2). Vermeld daarbij
 - de toetsingsgrootheid
 - welke aannames u maakt
 - de verdeling van de toetsingsgrootheid onder de (rand van de) nulhypothese
 - het kritieke gebied of de overschrijdingskans (p -waarde)
 - de conclusie van de toets.

Bijlage 1: Tabel normale verdeling

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999
3.1	0.999	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabel 1: Verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling op het interval $[0, 4]$. De waarde in de tabel is $\Phi(x)$ voor $x = a + b/100$ met a de waarde in de eerste kolom en b het getal in de eerste rij.

Bijlage 2: Tabel t -verdeling

df	0.6	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.925	0.95	0.975	0.98	0.99	0.999
1	0.32	0.73	1	1.38	1.96	3.08	4.17	6.31	12.71	15.89	31.82	318.31
2	0.29	0.62	0.82	1.06	1.39	1.89	2.28	2.92	4.3	4.85	6.96	22.33
3	0.28	0.58	0.76	0.98	1.25	1.64	1.92	2.35	3.18	3.48	4.54	10.21
4	0.27	0.57	0.74	0.94	1.19	1.53	1.78	2.13	2.78	3	3.75	7.17
5	0.27	0.56	0.73	0.92	1.16	1.48	1.7	2.02	2.57	2.76	3.36	5.89
6	0.26	0.55	0.72	0.91	1.13	1.44	1.65	1.94	2.45	2.61	3.14	5.21
7	0.26	0.55	0.71	0.9	1.12	1.41	1.62	1.89	2.36	2.52	3	4.79
8	0.26	0.55	0.71	0.89	1.11	1.4	1.59	1.86	2.31	2.45	2.9	4.5
9	0.26	0.54	0.7	0.88	1.1	1.38	1.57	1.83	2.26	2.4	2.82	4.3
10	0.26	0.54	0.7	0.88	1.09	1.37	1.56	1.81	2.23	2.36	2.76	4.14
11	0.26	0.54	0.7	0.88	1.09	1.36	1.55	1.8	2.2	2.33	2.72	4.02
12	0.26	0.54	0.7	0.87	1.08	1.36	1.54	1.78	2.18	2.3	2.68	3.93
13	0.26	0.54	0.69	0.87	1.08	1.35	1.53	1.77	2.16	2.28	2.65	3.85
14	0.26	0.54	0.69	0.87	1.08	1.35	1.52	1.76	2.14	2.26	2.62	3.79
15	0.26	0.54	0.69	0.87	1.07	1.34	1.52	1.75	2.13	2.25	2.6	3.73
16	0.26	0.54	0.69	0.86	1.07	1.34	1.51	1.75	2.12	2.24	2.58	3.69
17	0.26	0.53	0.69	0.86	1.07	1.33	1.51	1.74	2.11	2.22	2.57	3.65
18	0.26	0.53	0.69	0.86	1.07	1.33	1.5	1.73	2.1	2.21	2.55	3.61
19	0.26	0.53	0.69	0.86	1.07	1.33	1.5	1.73	2.09	2.2	2.54	3.58
20	0.26	0.53	0.69	0.86	1.06	1.33	1.5	1.72	2.09	2.2	2.53	3.55
21	0.26	0.53	0.69	0.86	1.06	1.32	1.49	1.72	2.08	2.19	2.52	3.53
22	0.26	0.53	0.69	0.86	1.06	1.32	1.49	1.72	2.07	2.18	2.51	3.5
23	0.26	0.53	0.69	0.86	1.06	1.32	1.49	1.71	2.07	2.18	2.5	3.48
24	0.26	0.53	0.68	0.86	1.06	1.32	1.49	1.71	2.06	2.17	2.49	3.47
25	0.26	0.53	0.68	0.86	1.06	1.32	1.49	1.71	2.06	2.17	2.49	3.45
26	0.26	0.53	0.68	0.86	1.06	1.31	1.48	1.71	2.06	2.16	2.48	3.43
27	0.26	0.53	0.68	0.86	1.06	1.31	1.48	1.7	2.05	2.16	2.47	3.42
28	0.26	0.53	0.68	0.85	1.06	1.31	1.48	1.7	2.05	2.15	2.47	3.41
29	0.26	0.53	0.68	0.85	1.06	1.31	1.48	1.7	2.05	2.15	2.46	3.4
30	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.48	1.7	2.04	2.15	2.46	3.39
31	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.48	1.7	2.04	2.14	2.45	3.37
32	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.04	2.14	2.45	3.37
33	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.03	2.14	2.44	3.36
34	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.03	2.14	2.44	3.35
35	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.03	2.13	2.44	3.34
36	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.03	2.13	2.43	3.33
37	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.3	1.47	1.69	2.03	2.13	2.43	3.33
38	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.3	1.47	1.69	2.02	2.13	2.43	3.32
39	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.3	1.47	1.68	2.02	2.12	2.43	3.31
40	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.3	1.47	1.68	2.02	2.12	2.42	3.31

Tabel 2: (Beneden-) Kwantielen van de t -verdelingen met 1 tot 40 vrijheidsgraden.