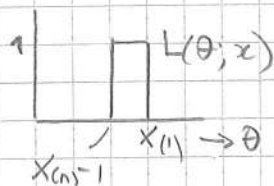


1. a.) Los op: $E_{\hat{\theta}} X_1 = \bar{X}$. $E_{\theta} X_1 = \frac{\theta + \theta + 1}{2} = \theta + \frac{1}{2}$.

2. Dus $\hat{\theta}_{\text{mom}} = \bar{X} - \frac{1}{2}$.

b.) $\text{MSE}(\theta; \hat{\theta}_{\text{mom}}) = \text{Var}_{\theta}(\hat{\theta}_{\text{mom}}) + (E\hat{\theta}_{\text{mom}} - \theta)^2$
 $= \text{Var}_{\theta}(\bar{X} - \frac{1}{2}) + (\theta - \theta)^2$
 $= \frac{1}{n} \text{Var}_{\theta}(X_1) = \frac{1}{12n}$.

c.) $L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n 1_{[\theta, \theta+1]}(x_i) = 1_{\theta \leq x_{(1)}} \cdot 1_{\theta \geq x_{(n)}-1}$



De likelihood is gelijk aan 1 op het interval $[x_{(1)}, x_{(n)}-1]$. Dus de ML-schatter is niet uniek!

2. $X_1, \dots, X_n \sim P_{\theta}(x) = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi}} e^{-\theta/2 x^2}$, $\theta > 0$ onbekend.

$\pi(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} \lambda^{\alpha} e^{-\lambda\theta}$ voor $\theta > 0$.

a.) $L(\theta; x) = \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{\theta}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\theta x_i^2} = \theta^{n/2} (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\theta \sum x_i^2}$

$\log L(\theta; x) = \frac{n}{2} \log \theta - \frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2}\theta \sum x_i^2$

3. $\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta; x) = \frac{n}{2\theta} - \frac{1}{2} \sum x_i^2 = 0$ als $\theta = \frac{n}{\sum x_i^2} = \frac{1}{\bar{x^2}}$

$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L(\theta; x) = -\frac{n}{2\theta^2} < 0 \quad \forall \theta > 0$.

Dus $\hat{\theta}_{\text{ML}} = \frac{1}{\bar{x^2}}$.

b.) $P_{(\mathbb{H})|X=x}(\theta) = \frac{\pi(\theta) P_{\theta}(x)}{C(x)} = \frac{\theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta} \theta^{n/2} e^{-\frac{1}{2}\theta \sum x_i^2}}{C'(x, \alpha, \lambda)}$

2. Dit is $\Gamma(\frac{n}{2} + \alpha, \frac{1}{2} \sum x_i^2 + \lambda)$. $= \frac{1}{C'(\alpha, \alpha, \lambda)} \theta^{\frac{n}{2} + \alpha - 1} e^{-\theta(\frac{1}{2} \sum x_i^2 + \lambda)}$

c.) De Bayes-schatting voor θ^2 is $E(\mathbb{H}^2 | X=x)$, ofwel het tweede moment van de gevonden Γ -verdeling. Algemeen voor $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ geldt $E(X^2) = \text{Var}(X) + (EX)^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$.

3. Dus hier $\hat{\theta}_{\text{Bayes}}^2 = \frac{(\frac{n}{2} + \alpha)(\frac{n}{2} + \alpha + 1)}{(\frac{1}{2} \sum x_i^2 + \lambda)^2}$.

3. a.) X_i : bezorgtijd van i 'e pizza

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ μ, σ^2 onbekend, X_i i.i.d.

$H_0: \mu \geq 30$ vs $H_1: \mu < 30$

b.) T-toets: $T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_X} \stackrel{\mu=30}{\sim} t_{n-1}$, verdeling.

Kritiek gebied $T \in (-\infty, t_{n-1; 0.05}] = (-\infty, 1.76]$.

Uitrekenen: $T = \sqrt{15} \frac{27.7 - 30}{2.4} = -3.71$

Conclusie: H_0 wordt verworpen. SmullenMaar bezorgt gemiddeld sneller dan in 30 minuten. Aanname: normaal verdeelde X_i .

c.) We nemen aan dat de Y_j 's, de bezorgtijden van Pizzalekker, ook normaal verdeeld zijn, $Y_j \sim N(\nu, \sigma^2)$ ν onbekend.

$H_0: \mu = \nu$ vs $H_1: \mu \neq \nu$ $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_{X,Y} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \stackrel{H_0}{\sim} t_{n+m-2}$.

$$S_{X,Y}^2 = (4 \cdot (2.4)^2 + 14 \cdot (2.6)^2) / 28 = (2.5)^2.$$

Kritiek gebied: $T \in (-\infty, t_{n+m-2; 0.025}] \cup [t_{n+m-2; 0.975}, \infty)$
 $= (-\infty, -2.05] \cup [2.05, \infty)$.

$T = \frac{27.7 - 28.6}{2.5 \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}}} = -0.99$. Dus T ligt niet in het kritieke gebied.

Conclusie: H_0 wordt niet verworpen. Er is geen significant verschil in verwachte bezorgtijden op basis van deze data.

4. a.) $p_p(x) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum x_i} (1-p)^{n - \sum x_i}$

$$= e^{\sum x_i \log p + (n - \sum x_i) \log(1-p)} = e^{n \log(1-p)} e^{\sum x_i \log \frac{p}{1-p}}$$

3 Dit is een 1-dim. exp. fam. met $V_1(X) = \sum X_i$, $Q_1(p) = \frac{p}{1-p}$.

De verzameling $\left\{ \frac{p}{1-p} : p \in [0, 1] \right\} = \mathbb{R}^+$ heeft zeker inwendig punt in $\mathbb{R}^+$, dus $V_1(X) = \sum X_i$ is voldoende en volledig.

b.) $\hat{p}_{ML} = \bar{X} = \frac{1}{n} V_1(X)$ is gebaseerd op vold + voll. statistiek

$E(\bar{X}) = p$, dus deze schatter is bovendien zuiver.

2 Daarmee is $\bar{X}$ UMVZ voor p .

(3)

$$\begin{aligned}
 c.) \quad i_p &= -E(\ell_p''(X_1)) = -E \frac{\partial^2}{\partial p^2} [X_1 \log p + (1-X_1) \log(1-p)] \\
 &= -E \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{X_1}{p} - \frac{1-X_1}{1-p} \right] = -E \left(-\frac{X_1}{p^2} - \frac{1-X_1}{(1-p)^2} \right) = \frac{p}{p^2} + \frac{1-p}{(1-p)^2} \\
 &= \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} = \frac{1-p+p}{p(1-p)} = \frac{1}{p(1-p)}
 \end{aligned}$$

$$i_{\hat{p}} = \frac{1}{\bar{x}(1-\bar{x})} \quad \text{omdat } \hat{p}_{mc} = \bar{x}, \quad i_{\hat{p}} = \left(\frac{86}{95} \left(1 - \frac{86}{95} \right) \right)^{-1} = 11.66$$

d.) De variantie van de UMVZ schatter is $\text{Var}_p \bar{X} = \frac{1}{n} \text{Var}_p X_1 = \frac{p(1-p)}{n}$

De CR ondergrens is $\text{Var}_p T \geq \frac{1}{n i_p} = \frac{p(1-p)}{n}$. Dus $\bar{X}$ heeft de minimum variantie.

e.) Er geldt $\sqrt{n}(\hat{p}_{mc} - p) \rightsquigarrow N(0, \frac{1}{i_p})$. Dus voor grote n geldt $\hat{p}_{mc} \approx N(p, \frac{1}{n i_p})$. Het Wald-interval is dan $p = \hat{p}_{mc} \pm \frac{1}{\sqrt{n i_p}} z_{1-\alpha/2}$. Met $\alpha = 0.10$, $z_{1-\alpha/2} = 1.64$ is dit

$$p = \frac{86}{95} \pm \frac{1}{\sqrt{95 \cdot 11.66}} 1.64 = 0.905 \pm 0.049 = [0.86, 0.95].$$

5. a.) Beide toetsen hebben dezelfde onbetrouwbaarheid, dus de voorkeur wordt gebaseerd op onderscheidend vermogen in θ onder H_1 . Die is groter bij K' , de stippellijn, dan K heeft de voorkeur.

b.) Gegeven $K_{\theta_0} \subseteq K'_{\theta_0} \quad \forall \theta_0 \in \Theta$.

$G_X = \{\theta : X \notin K_{\theta_0}\}$ en $G'_X = \{\theta : X \notin K'_{\theta_0}\}$. Uit de relatie

$K_{\theta_0} \subseteq K'_{\theta_0}$ volgt $G_X = \{\theta : X \notin K_{\theta_0}\} \supseteq \{\theta : X \notin K'_{\theta_0}\} = G'_X$

want $X \notin K'_{\theta_0} \supseteq K_{\theta_0} \Rightarrow X \notin K_{\theta_0}$. Dus $G'_X \subseteq G_X$ en het betrouw gebied gebaseerd op K' is dus kleiner (= beter)

c.) $G = [L, R]$, met $P(L \leq \theta \leq R) \geq 1-\alpha$. Omdat $\theta \mapsto e^\theta$ een

monot. stijgende functie is, geldt $P(e^L \leq e^\theta \leq e^R) \geq 1-\alpha$.

Dus een $(1-\alpha)$ bti voor e^θ is $[e^L, e^R]$.