

1. $p_{\theta}(x) = \frac{3x^2}{\theta^3} \mathbb{1}_{[0, \theta]}(x)$

2. a.) $F(x) = \int_0^x \frac{3t^2}{\theta^3} dt = \frac{x^3}{\theta^3}$ voor $x \leq \theta$.

2. b.) $F^{-1}(x) = x_{\alpha}$ als $F(x_{\alpha}) = x = \frac{x_{\alpha}^3}{\theta^3}$. $x_{\alpha} = \theta \sqrt[3]{x}$.

2. c.) Voor $\text{hom}[0,1]$ geldt: $F(x) = x$ en $F^{-1}(x) = x$.

Deze verdeling zit in de lok. sch. familie van $\text{hom}[0,1]$ als er $a \in \mathbb{R}$ en $b > 0$ bestaan zodat $\theta \sqrt[3]{x} = a + b x$ $\forall x \in (0,1)$. Maar die bestaan niet. Dus niet in de lok. sch. familie.

2. d.) Ja, UMVU-schatters zijn zuiver en hebben de minimum variantie onder de zuivere schatters. Dus ze zijn beter dan andere zuivere schatters, omdat die mogelijk een grotere variantie hebben.

1. e.) $\text{Var}_{\theta}(T) \geq \frac{1}{n I_{\theta}}$, voor zuivere schatters T voor θ .

2. $X_1, \dots, X_n \sim p_{\theta}(x) = \frac{3\theta^3}{x^4} \mathbb{1}_{x > \theta}$ met $\theta > 0$.

a.) $\hat{\theta}_{\text{mom}}$ oplossen uit $E_{\hat{\theta}} X_1 = \bar{X}$. $E_{\theta} X_1 = \int_{\theta}^{\infty} \frac{3\theta^3}{x^3} dx = \frac{3}{2} \theta$.

2. dus $\hat{\theta}_{\text{mom}} = \frac{2}{3} \bar{X} = \hat{\theta}_1$.

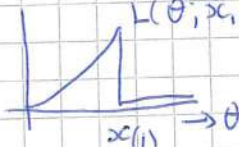
b.) $\text{MSE}(\theta; \hat{\theta}_1) = \text{Var}_{\theta}(\frac{2}{3} \bar{X}) + (E_{\theta}(\frac{2}{3} \bar{X}) - \theta)^2 = \text{Var}_{\theta}(\frac{2}{3} \bar{X})$.

$\text{Var}_{\theta} X_1 = E_{\theta}(X_1^2) - (E_{\theta} X_1)^2$.

3. $E_{\theta} X_1^2 = \int_{\theta}^{\infty} \frac{3\theta^3}{x^2} dx = 3\theta^2$, $\text{Var}_{\theta} X_1 = 3\theta^2 - \frac{9}{4} \theta^2 = \frac{3}{4} \theta^2$

$\text{MSE}(\theta; \hat{\theta}_1) = \frac{4}{9n} \text{Var}_{\theta} X_1 = \frac{\theta^2}{3n}$.

c.) $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ bepalen. $L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{3\theta^3}{x_i^4} \mathbb{1}_{(\theta, \infty)}(x_i) =$

3. $= 3^n \theta^{3n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i^4} \mathbb{1}_{\theta < x_{(1)}}$

 $\hat{\theta}_{\text{ML}} = X_{(1)}$.

(2)

- ② d.) $MSE(\theta; \hat{\theta}_1) > MSE(\theta; \hat{\theta}_2)$ voor $n \geq 2$. Dus $\hat{\theta}_2$ heeft de voorkeur.

3. a.) $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ met $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$.

② $Y_i \sim N(\nu, \sigma^2)$ Aanname: varianties zijn gelijk.

$H_0: \mu = \nu$ versus $H_1: \mu \neq \nu$.

b.) $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_{X,Y} \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \stackrel{H_0}{\sim} t_{n+m-2} = t_{16}$.

④ $S_{X,Y}^2 = \frac{1}{16} (195.56 + 160.22) = (4.72)^2 = 22.24$

waargenomen $T = t = \frac{35.22 - 31.56}{4.72 \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}}} = 1.65$

$K_T = (-\infty, t_{16;0.025}] \cup [t_{16;0.975}, \infty) = (-\infty, -2.12] \cup [2.12, \infty)$

Dus $T \notin K_T$ en H_0 wordt niet verworpen.

- ② c.) De steekproefgrootte groter maken; meer mensen meten.

4. $X_1, \dots, X_{25} \sim N(\mu, 1)$ met $\mu \in \mathbb{R}$.

- a.) $T = T(X, \theta)$ is een pivot als de verdeling van T bekend is, en in het bijzonder niet van θ afhangt. (Hier is de parameter μ .) $T = \sqrt{25} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ is bekende verdeling.

- b.) Een symmetrisch interval bouwen:

$1 - \alpha = P\left(-\xi_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{25} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \leq \xi_{1-\alpha/2}\right)$

③ $= P\left(|\bar{X} - \mu| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{25}} \xi_{1-\alpha/2}\right)$

interval $\mu = \bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{25}} \xi_{1-\alpha/2} = 15.28 \pm \frac{1}{5} \xi_{1-\alpha/2}$

grenzen: $[14.98, 15.58]$, dus $\frac{1}{5} \xi_{1-\alpha/2} = 0.3$.

$\xi_{1-\alpha/2} = 1.5$ en $1 - \alpha/2 = 0.9332$. Dus $\alpha = 0.1336$.

- c.) $H_0: \mu = 14.7$ wordt verworpen bij drempel $\alpha = 0.1336$ omdat de waarde niet in het bti ligt met deze zelfde onbetrouwbaarheid.

②

d.) Als de onbetrouwbaarheid hoger wordt, wordt het kritieke gebied groter, en het bti kleiner.
 Dus dan wordt $H_0: \mu = 14.7$ ook verworpen.

5. $X_1, \dots, X_n \sim p_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} 1_{x>0}$ met $\theta > 0$. $\hat{\theta}_{ML} = \bar{X}$.

a.) $p_\theta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} e^{-x_i/\theta} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum x_i} = c(\theta) e^{Q_1(\theta) V_1(x)}$

3 met $Q_1(\theta) = -\frac{1}{\theta}$ en $V_1(x) = \sum x_i$.

Omdat $\{-\frac{1}{\theta} : \theta > 0\}$ een inwendig punt in $\mathbb{R}$ bevat in $\sum x_i$ voldoende en volledig.

b.) $\hat{\theta}_{ML} = \bar{X}$ is gebaseerd op $V(X) = \sum x_i$ die voldoende en volledig is.
 Als $\hat{\theta}_{ML}$ zuiver is, dan is $\hat{\theta}_{ML}$ dus UMVZ.

2 $E_\theta(\hat{\theta}_{ML}) = E_\theta \bar{X} = E_\theta X_1 = \theta$, dus $\hat{\theta}_{ML} = \bar{X}$ is UMVZ.

c.) $i_\theta = \text{var}_\theta(\dot{\ell}_\theta(X_1)) = -E(\ddot{\ell}_\theta(X_1))$.

2 $\ell_\theta(x_1) = \log\left(\frac{1}{\theta} \cdot e^{-x_1/\theta}\right) = -\log \theta - x_1/\theta$

$\dot{\ell}_\theta(x_1) = -\frac{1}{\theta} + \frac{x_1}{\theta^2}$, $\ddot{\ell}_\theta(x_1) = \frac{1}{\theta^2} - \frac{2x_1}{\theta^3}$.

$i_\theta = -E(\ddot{\ell}_\theta(X_1)) = -\frac{1}{\theta^2} + \frac{2E X_1}{\theta^3} = -\frac{1}{\theta^2} + \frac{2\theta}{\theta^3} = \frac{1}{\theta^2}$.

d.) $\text{Var}_\theta(\bar{X}) = \frac{1}{n} \text{Var}_\theta(X_1) = \frac{\theta^2}{n}$ (indien $\exp(\frac{1}{\theta})$ herkend in)
 2 uit lemma: $\frac{1}{\theta^2} = \text{Var}\left(-\frac{1}{\theta} + \frac{x_1}{\theta^2}\right) = \frac{1}{\theta^4} \cdot \text{Var} X_1$, dus $\text{Var} X_1 = \theta^2$

e.) Cramér Rao ondergrens: $\text{Var}_\theta(T) \geq \frac{1}{n i_\theta}$ voor zuivere schatters T voor θ .

1 Hier is de grens $\frac{1}{n i_\theta} = \frac{\theta^2}{n} = \text{var}(\bar{X}) = \text{var}(\hat{\theta}_{ML})$.

Dus de grens is scherp.