

Afdeling Wiskunde	Volledig tentamen Algemene Statistiek
	Deeltentamen 2 Algemene Statistiek
Vrije Universiteit	19 december 2012

Gebruik van een **niet-programmeerbare rekenmachine** is toegestaan.
Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau FEW.
De normering staat bij de vragen aangegeven.

Geheel tentamen: **opgaven 1,2,3,4**. Cijfer = $\frac{totaal+4}{4}$.

Deeltentamen 2: **opgaven 3,4,5**. Cijfer = $\frac{totaal+3}{3}$.

Vermeld duidelijk je **studierichting** op je uitwerking!

SUCCES!

Opgave 1 [9 punten] **Alleen voor gehele tentamen**

Beantwoord de volgende algemene vragen die betrekking hebben op een i.i.d. steekproef $X_1, \dots, X_n$ uit een verdeling F_θ met θ een onbekende parameter.

- [2 punten] Zijn UMVZ schatters in het algemeen beter dan andere zuivere schatters? Motiveer uw antwoord.
- [1 punt] Wat is de Cramér-Rao ondergrens voor $\text{var}_\theta(T)$ waar $T = T(X_1, \dots, X_n)$ een zuivere schatter is θ ?

Beschouw nu de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{3x^2}{\theta^3} 1_{[0,\theta]}(x)$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- [2 punten] Bepaal de verdelingsfunctie $F(x)$ van deze verdeling.
- [2 punten] Bepaal de kwantielfunctie $F^{-1}(\alpha)$ van deze verdeling.
- [2 punten] Zit deze verdeling in de lokatie-schaalfamilie van de homogene verdeling op het interval $[0,1]$? Beargumenteer uw antwoord duidelijk, eventueel met een berekening.

Opgave 2 [10 punten] **Alleen voor gehele tentamen**

Zij $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{3\theta^3}{x^4} 1_{x>\theta}$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- [2 punten] Bepaal de momentenschatting $\hat{\theta}_1$ voor θ .
- [3 punten] Bepaal de mean square error $MSE(\theta; \hat{\theta}_1)$ voor de momentenschatting uit onderdeel (a).
- [3 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatting $\hat{\theta}_2$ voor θ .
- [2 punten] Als gegeven is dat

$$MSE(\theta; \hat{\theta}_2) = \frac{2\theta^2}{9n^2 - 9n + 2},$$

welke van deze twee schatters heeft dan de voorkeur?

Opgave 3 [8 punten]

In een fabriek werken twee verschillende ploegen die kleine apparaten in elkaar zetten aan de lopende band. Ploeg A is anders getraind om de apparaten in elkaar te zetten dan ploeg B. Om te onderzoeken of de trainingen een verschillend resultaat geven wat betreft werktempo, worden uit iedere ploeg 9 mensen geselecteerd. Van deze mensen wordt de tijd gemeten die ze nodig hebben om een apparaat in elkaar te zetten. Dit geeft metingen $X_1, \dots, X_9$ en $Y_1, \dots, Y_9$. Waargenomen wordt $\bar{x} = 35.22$ seconden, $\bar{y} = 31.56$ seconden, $\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = 195.56$ en $\sum_{i=1}^9 (y_i - \bar{y})^2 = 160.22$.

- [2 punten] Stel voor deze situatie een geschikt statistisch model op en een geschikte nulhypothese.
- [4 punten] Toets de nulhypothese uit onderdeel (a) bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van 5%. Vermeld de toetsingsgrootte, de verdeling van de toetsingsgrootte onder de nulhypothese, de overschrijdingskans of het kritieke gebied, en de conclusie van de toets. Vermeld duidelijk welke aannames u maakt.
- [2 punten] Op welke manier kan men de opzet van deze toets aanpassen om een hoger onderscheidend vermogen onder de alternatieve hypothese te verkrijgen?

Opgave 4 [9 punten]

Zij $X_1, \dots, X_{25}$ een steekproef uit de $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verdeling met onbekende parameter $\mu \in \mathbb{R}$ en variantie $\sigma^2 = 1$.

- [3 punten] Geef de definitie van een pivot en toon aan dat $T = \sqrt{25} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$ een pivot is.
- [3 punten] Stel dat we op basis van de pivot uit onderdeel (a) het $(1 - \alpha)$ -betrouwbaarheidsinterval voor μ vinden dat gelijk is $[14.98, 15.58]$, symmetrisch rond $\bar{x} = 15.28$. Welke waarde voor α hebben we dan gekozen?
- [2 punten] Toets met behulp van het interval uit onderdeel (b) de hypothese $H_0 : \mu = 14.7$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel α (α is dezelfde onbetrouwbaarheid als in onderdeel (b)).
- [1 punt] Toets met behulp van het interval uit onderdeel (b) de hypothese $H_0 : \mu = 14.7$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.15$. (Indien u bij onderdeel (b) geen antwoord heeft gevonden, ga dan uit van $\alpha = 0.1$ als antwoord bij (b)).

Opgave 5 [10 punten] **Alleen voor deeltentamen 2**

Zij $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} 1_{x>0}$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is. De maximum likelihood-schatter voor θ is gelijk aan $\bar{X}$.

- [3 punten] Bepaal een voldoende en volledige statistiek.
- [2 punten] Bepaal een UMVZ-schatter voor θ . Geef duidelijk aan waarom de schatter UMVZ is.
- [2 punten] Bepaal de Fisher-informatie i_θ . (*Hint: U kunt voor de berekening gebruik maken van het lemma: $i_\theta = \text{var}_\theta(\dot{\ell}_\theta(X_1)) = -E_\theta(\ddot{\ell}_\theta(X_1))$.*)
- [2 punten] Bepaal de variantie van de UMVZ-schatter uit onderdeel (b). Mocht u daar geen antwoord hebben, neem dan als schatter $\bar{X}$. (*Hint: U kunt wederom het lemma gebruiken om $\text{var}_\theta(X_1)$ te bepalen*).
- [1 punt] Is de Cramér-Rao ondergrens voor de variantie van een zuivere schatter voor θ scherp in dit geval?

Bijlage 1: Tabel normale verdeling

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999
3.1	0.999	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Table 1: Verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling op het interval $[0, 4]$. De waarde in de tabel is $\Phi(x)$ voor $x = a + b/100$ met a de waarde in de eerste kolom en b het getal in de eerste rij.

Bijlage 2: Tabel t -verdeling

df	0.6	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.925	0.95	0.975	0.98	0.99	0.999
1	0.32	0.73	1	1.38	1.96	3.08	4.17	6.31	12.71	15.89	31.82	318.31
2	0.29	0.62	0.82	1.06	1.39	1.89	2.28	2.92	4.3	4.85	6.96	22.33
3	0.28	0.58	0.76	0.98	1.25	1.64	1.92	2.35	3.18	3.48	4.54	10.21
4	0.27	0.57	0.74	0.94	1.19	1.53	1.78	2.13	2.78	3	3.75	7.17
5	0.27	0.56	0.73	0.92	1.16	1.48	1.7	2.02	2.57	2.76	3.36	5.89
6	0.26	0.55	0.72	0.91	1.13	1.44	1.65	1.94	2.45	2.61	3.14	5.21
7	0.26	0.55	0.71	0.9	1.12	1.41	1.62	1.89	2.36	2.52	3	4.79
8	0.26	0.55	0.71	0.89	1.11	1.4	1.59	1.86	2.31	2.45	2.9	4.5
9	0.26	0.54	0.7	0.88	1.1	1.38	1.57	1.83	2.26	2.4	2.82	4.3
10	0.26	0.54	0.7	0.88	1.09	1.37	1.56	1.81	2.23	2.36	2.76	4.14
11	0.26	0.54	0.7	0.88	1.09	1.36	1.55	1.8	2.2	2.33	2.72	4.02
12	0.26	0.54	0.7	0.87	1.08	1.36	1.54	1.78	2.18	2.3	2.68	3.93
13	0.26	0.54	0.69	0.87	1.08	1.35	1.53	1.77	2.16	2.28	2.65	3.85
14	0.26	0.54	0.69	0.87	1.08	1.35	1.52	1.76	2.14	2.26	2.62	3.79
15	0.26	0.54	0.69	0.87	1.07	1.34	1.52	1.75	2.13	2.25	2.6	3.73
16	0.26	0.54	0.69	0.86	1.07	1.34	1.51	1.75	2.12	2.24	2.58	3.69
17	0.26	0.53	0.69	0.86	1.07	1.33	1.51	1.74	2.11	2.22	2.57	3.65
18	0.26	0.53	0.69	0.86	1.07	1.33	1.5	1.73	2.1	2.21	2.55	3.61
19	0.26	0.53	0.69	0.86	1.07	1.33	1.5	1.73	2.09	2.2	2.54	3.58
20	0.26	0.53	0.69	0.86	1.06	1.33	1.5	1.72	2.09	2.2	2.53	3.55
21	0.26	0.53	0.69	0.86	1.06	1.32	1.49	1.72	2.08	2.19	2.52	3.53
22	0.26	0.53	0.69	0.86	1.06	1.32	1.49	1.72	2.07	2.18	2.51	3.5
23	0.26	0.53	0.69	0.86	1.06	1.32	1.49	1.71	2.07	2.18	2.5	3.48
24	0.26	0.53	0.68	0.86	1.06	1.32	1.49	1.71	2.06	2.17	2.49	3.47
25	0.26	0.53	0.68	0.86	1.06	1.32	1.49	1.71	2.06	2.17	2.49	3.45
26	0.26	0.53	0.68	0.86	1.06	1.31	1.48	1.71	2.06	2.16	2.48	3.43
27	0.26	0.53	0.68	0.86	1.06	1.31	1.48	1.7	2.05	2.16	2.47	3.42
28	0.26	0.53	0.68	0.85	1.06	1.31	1.48	1.7	2.05	2.15	2.47	3.41
29	0.26	0.53	0.68	0.85	1.06	1.31	1.48	1.7	2.05	2.15	2.46	3.4
30	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.48	1.7	2.04	2.15	2.46	3.39
31	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.48	1.7	2.04	2.14	2.45	3.37
32	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.04	2.14	2.45	3.37
33	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.03	2.14	2.44	3.36
34	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.03	2.14	2.44	3.35
35	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.03	2.13	2.44	3.34
36	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.03	2.13	2.43	3.33
37	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.3	1.47	1.69	2.03	2.13	2.43	3.33
38	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.3	1.47	1.69	2.02	2.13	2.43	3.32
39	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.3	1.47	1.68	2.02	2.12	2.43	3.31
40	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.3	1.47	1.68	2.02	2.12	2.42	3.31

Table 2: (Beneden-) Kwantielen van de t -verdelingen met 1 tot 40 vrijheidsgraden.