

Het gebruik van een rekenmachine is NIET toegestaan. Succes!

1. Stel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de verdeling met kansdichtheid

$$f_{\theta}(x) = \frac{2x}{\theta^2} \quad 0 \leq x \leq \theta$$

en $f_{\theta}(x) = 0$ voor $x < 0$ of $x > \theta$.

- (a) Bepaal de momenten schatter voor θ .
 - (b) Bepaal de verwachte kwadratische fout van de momenten schatter voor θ . Als je niet uit onderdeel (a) gekomen bent, veronderstel dan dat deze schatter gelijk is aan $2\bar{X}$.
 - (c) Bepaal de maximum likelihood schatter voor θ .
2. Een caféhouder overweegt de prijs van het bier te verlagen om een hogere klandizie te krijgen. Een lagere bierprijs levert echter minder geld op en moet gecompenseerd worden door een hogere verkoop. Van de afgelopen 20 weken is de wekelijkse verkoop bij gehouden; $X_1, \dots, X_{20}$ geeft de wekelijkse hoeveelheden verkocht bier in liters. De bierprijs wordt verlaagd en daar wordt veel ruchtbaarheid aan gegeven. Over 10 weken, als iedereen op de hoogte is van de prijsverlaging, zal opnieuw 20 weken lang de verkochte hoeveelheid bier (in liters) bijgehouden worden: $Y_1, \dots, Y_{20}$. We veronderstellen dat $X_1, \dots, X_{20}$ onderling onafhankelijk en normaal verdeeld zijn met alle gelijke verwachting en variantie. Ook veronderstellen we dat $Y_1, \dots, Y_{20}$ onderling onafhankelijk en normaal verdeeld zijn met alle gelijke verwachting en variantie en dat de twee steekproeven onafhankelijk zijn. De caféhouder maakt meer winst als het verwachte aantal verkochte liters per week met 50 liter toeneemt. Hij wil onderzoeken of dit het geval is.
- (a) Beschrijf een toets voor bovenstaande onderzoeksvraag met onbetrouwbaarheid α_0 . Beschrijf:
 - de modelaannamen
 - een nul en alternatieve hypothese,
 - een toetsingsgrootheid,
 - het kritieke gebied, en hoe je aan het kritieke gebied gekomen bent,
 - hoe je de overschrijdingskans bepaalt.
 - (b) Veronderstel dat we het onderscheidend vermogen onder de alternatieve hypothese te laag vinden. Hoe zouden we dit kunnen verhogen?

3. Veronderstel dat $(X_1, Y_1, Z_1), \dots, (X_n, Y_n, Z_n)$ een steekproef is uit de verdeling met dichtheid

$$f_{\theta}(x, y, z) = \theta^2 y^2 e^{-\theta xy - \theta yz - y}, \quad x > 0, y > 0, z > 0.$$

De parameter $\theta > 0$ is onbekend.

- (a) Bepaal de maximum likelihood schatters voor θ en θ^2 .
 - (b) Bepaal een benaderend $(1 - \alpha)100\%$ betrouwbaarheidsinterval voor θ gebaseerd op de likelihood ratio toetsingsgrootte. Leg duidelijk uit hoe je er aan gekomen bent.
4. Laat $X_1, \dots, X_n$ de levensduur van n gelijksoortige lampen zijn. Op basis van QQ-plots veronderstellen we dat $X_1, \dots, X_n$ exponentieel verdeeld zijn met onbekende parameter λ . Bovendien veronderstellen we dat $X_1, \dots, X_n$ onderling onafhankelijk zijn. De maximum likelihood schatter voor λ is $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$. In deze opgave willen we een benaderend $(1 - \alpha)100\%$ betrouwbaarheidsinterval opstellen voor de verwachte levensduur van een lamp: $E_{\lambda}X_i = 1/\lambda$.
- (a) Bepaal de Fisher informatie voor λ gebaseerd op 1 waarneming. Welke verdeling heeft de maximum likelihood schatter $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$ voor λ , bij benadering voor grote waarden van n ?
 - (b) Bepaal een benaderend $(1 - \alpha)100\%$ betrouwbaarheidsinterval voor $E_{\lambda}X_i = 1/\lambda$ waarbij je gebruik maakt van de asymptotische verdeling van $\hat{\lambda}$. Leg duidelijk uit hoe je aan dit interval komt.
- Hint: Het kan helpen om eerst een betrouwbaarheidsinterval voor λ te construeren.

5. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de verdeling met dichtheid

$$f_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x > 0.$$

De parameters μ en $\sigma^2 > 0$ zijn onbekend. De maximum likelihood schatters voor μ en σ^2 zijn gelijk aan $\hat{\mu} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \log X_i$ en $\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (\log X_i - \hat{\mu})^2$.

- (a) Bepaal een voldoende en volledige statistiek van dimensie 2.
- (b) Bepaal een UMVZ-schatter voor $\mu = E_{\mu, \sigma} \log X$.
- (c) Bewijs de volgende bewering: De statistiek $V = f(V^*)$ is voldoende voor (μ, σ^2) voor f een 1-1 duidige functie (bijjectie) dan en slechts dan als V^* voldoende is voor (μ, σ^2) .

Normering:

1(a):	3	2(a):	5	3(a):	3	4(a):	2	5(a):	3
1(b):	3	2(b):	2	3(b):	3	4(b):	3	5(b):	3
1(c):	3							5(c):	3

Eindcijfer: (totaal + 4)/4