

Het gebruik van een rekenmachine is NIET toegestaan. Succes!

1. Laat  $X_1, \dots, X_n$  een steekproef zijn uit de verdeling met kansdichtheid

$$f_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x \in [0, 1]$$

met  $\alpha > 0$  onbekend. Bepaal de momentenschatter voor  $\alpha$ .

2. Veronderstel dat een experiment op twee manieren uitgevoerd kan worden. Een waarneming gevonden met methode 1 is Poisson verdeeld met parameter  $\theta$ . Een waarneming gevonden met methode 2 is tevens Poisson verdeeld maar nu met parameter  $2\theta$ . Veronderstel dat men van plan is het experiment  $n$  maal uit te voeren met methode 1 en  $m$  maal met methode 2. Dit levert dan twee onafhankelijke steekproeven op:  $X_1, \dots, X_n$  en  $Y_1, \dots, Y_m$ , waarbij  $X_1, \dots, X_n$  Poisson( $\theta$ ), en  $Y_1, \dots, Y_m$  Poisson( $2\theta$ ) verdeeld zijn.

- (a) Laat zien dat de maximum likelihood schatter van  $\theta$  gelijk is aan  $(\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^m Y_i)/(n + 2m)$ .
- (b) Bepaal de mean squared error van de maximum likelihood schatter voor  $\theta$ . Veronderstel dat je  $n$  en  $m$  zelf kiezen mag onder de voorwaarde dat  $n + m = 100$ . Hoe zou je  $n$  en  $m$  kiezen opdat de mean squared error minimaal is? Geef toelichting.

Veronderstel dat  $n = m$ . We willen de nulhypothese  $H_0 : \theta = \theta_0$  toetsen tegen het alternatief  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ . Definieer  $W = \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i)$ .

- (c) Welke verdeling heeft  $W$  bij benadering voor een grote waarde van  $n$ ? Geef toelichting.
- (d) Bepaal een kritiek gebied  $K_W$  voor de toetsingsgrootte  $W$  om  $H_0$  te toetsen tegen  $H_1$ , waarvan de onbetrouwbaarheid bij benadering gelijk aan  $\alpha_0$  is.
- Als je niet weet welke verdeling  $W$  bij benadering heeft, veronderstel dan dat  $W$  bij benadering normaal verdeeld is met verwachting  $2n\theta$  en variantie  $2n\theta$  (dit hoeft niet het goede antwoord te zijn).

3. Zij  $X_1, \dots, X_n$  een steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \theta x^{-2}, \quad \text{voor } x \geq \theta$$

en 0 voor  $x < \theta$ , met  $\theta > 0$  onbekend.

- (a) Bepaal de maximum likelihood-schatter voor  $\theta$ .
  - (b) Horen de verdelingen met  $\theta = 1$  en  $\theta = 2$  tot dezelfde locatie-schaal familie? Leg uit met een korte berekening.
4. Laat  $X_1, \dots, X_n$  een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid  $p_\theta$  gegeven door

$$p_\theta(x) = \frac{1}{2}\theta e^{-\theta|x|}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

waarbij  $\theta > 0$  een onbekende parameter is. We gaan deze parameter Bayesiaans schatten en gebruiken daarvoor als a-priori verdeling een gamma verdeling met vast gekozen parameters  $r, \lambda > 0$ . Deze heeft dichtheid

$$\pi(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

met  $\Gamma$  de gamma functie (de precieze vorm van  $\Gamma$  doet er niet toe), verwachting  $r/\lambda$  en variatie  $r/\lambda^2$ .

- (a) Veronderstel dat we zeer weinig a priori kennis hebben over  $\theta$ . Leg uit hoe je in dit geval de parameters  $\lambda$  en  $r$  zou kiezen.
- (b) Bepaal de a-posteriori verdeling. Welke bekende verdeling is dit? Bepaal bovendien de Bayes schatter voor  $\theta$  op basis van de steekproef.

**Normering:**

1: 3   2(a): 4   3(a): 3   4(a): 2  
       2(b): 3   3(b): 3   4(b): 4  
       2(c): 1  
       2(d): 4

**Eindcijfer: (totaal + 3)/3**