

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje. Het gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Succes!

1. Zij  $X_1, \dots, X_n$  een rij onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische grootheden met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2} \quad \text{voor } x \geq 0.$$

Hierin is  $\theta > 0$  een onbekende parameter. De bijbehorende verwachtingswaarde van  $X_i$  is  $E_\theta X_i = 0.5\sqrt{\pi/\theta}$

- (a) Bereken de maximum likelihood schatter voor  $\theta$  op basis van de waarnemingen  $X_1, \dots, X_n$ .
- (b) Bepaal een momenten schatter voor  $\theta$  op basis van de waarnemingen  $X_1, \dots, X_n$ .
- (c) Bepaal de Bayes schatter voor  $\theta$  op basis van  $X_1, \dots, X_n$  en ten opzichte van de a priori verdeling voor  $\theta$  gelijk aan de gamma verdeling met parameters  $\alpha > 0$  en  $\lambda > 0$ :

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1} \lambda^\alpha e^{-\lambda\theta}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \text{voor } \theta > 0$$

waar  $\Gamma$  de zogenaamde Gamma-functie is. De bijbehorende verwachting en variantie zijn gelijk aan  $\alpha/\lambda$  en  $\alpha/\lambda^2$ .

- (d) Vergelijk de maximum likelihood schatter en de Bayes schatter. Wat valt op als de steekproefgrootte  $n$  naar oneindig gaat?

2. (a) Laat zien dat de standaard normale verdeling en de normale verdeling met verwachting  $\mu$  en variantie  $\sigma^2$  in dezelfde locatie-schaal familie zitten.
- (b) Laat tevens zien dat elke verdeling in de locatie schaal familie van de standaard normale verdeling een normale verdeling is (niet noodzakelijkerwijs standaard normaal).
3. Bij een chemisch proces hoort per uur 10 ton afvalstoffen achter te blijven. Controleurs hebben het idee dat de hoeveelheid afvalstoffen te hoog is. Daarom wordt voor 16 uur lang het productieproces in de gaten gehouden en de hoeveelheden afvalstoffen per uur genoteerd. Veronderstel dat de hoeveelheden afvalstoffen in deze 16 uren, genoteerd met  $X_1, \dots, X_{16}$ , onderling onafhankelijk en normaal verdeeld zijn met onbekende verwachting  $\mu$  en bekende variantie 1. Waargenomen wordt  $\bar{x} = 10.5$ .
  - (a) Formuleer een geschikte nul en alternatieve hypothese voor bovenstaande situatie. Toets de nulhypothese bij onbetrouwbaarheidsdrempel  $\alpha_0 = 0.05$ . Geef de toetsings-grootheid, het kritieke gebied en uw conclusie in woorden.
  - (b) Veronderstel dat als de verwachte hoeveelheid afval stoffen per uur ( $\mu$ ) gelijk is aan 10.4 ton, men dit wil ontdekken met een kans van ten minste 0.80 (het onderscheidend vermogen in 10.4 moet ten minste 0.80 zijn). Bereken hoeveel uren er dan minimaal gemeten moeten worden?

Normering:

1(a): 4    2(a): 2    3(a): 6  
 1(b): 4    2(b): 2    3(b): 4  
 1(c): 4    ~~3(c):~~  
 1(d): 1

Eindcijfer: (totaal + 3)/3