

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje. Het gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Succes!

1. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de verdeling met kansdichtheid

$$f_\lambda(x) = \lambda x^{\lambda-1} \quad \text{voor } 0 < x < 1,$$

en $f_\lambda(x) = 0$ voor $x \leq 0$ en $x \geq 1$. De parameter $\lambda > 0$ is onbekend.

- (a) Laat zien dat de maximum likelihood schatter voor λ gelijk is aan $\hat{\lambda} = -n / \sum_{i=1}^n \log X_i$.
- (b) Bereken de waargenomen Fisher informatie voor λ .
- (c) Hoe is de maximum likelihood schatter voor λ bij benadering verdeeld? Bepaal op basis van deze verdeling een benaderend $(1 - \alpha)100\%$ betrouwbaarheidsinterval voor λ .
- (d) Bepaal de likelihood ratiostatistiek voor het toetsen van $H_0 : \lambda = \lambda_0$ tegen $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$. Bepaal vervolgens een $(1 - \alpha)100\%$ betrouwbaarheidsinterval voor λ op basis van de likelihood ratiostatistiek.

2. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de verdeling met dichtheid

$$f_\theta(x) = e^{\theta-x} \quad \text{voor } x \geq \theta,$$

en $f_\theta(x) = 0$ voor $x < \theta$, waarbij $\theta \in (-\infty, \infty)$ onbekend is. Bepaal de maximum likelihood schatter voor θ .

3. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de exponentiële verdeling met onbekende parameter $\lambda > 0$.

- (a) Bepaal de momentenschatter voor $1/\lambda$. Is deze schatter zuiver voor $1/\lambda$?
- (b) Bepaal de Cramér-Rao ondergrens voor het schatten van $1/\lambda$.
- (c) Is de momentenschatter een UMVZ-schatter voor $1/\lambda$? Licht je antwoord toe.
Hint: Je kunt hierbij de antwoorden die je in de onderdelen (a) en (b) gevonden hebt gebruiken. Als je onderdeel (b) niet maken kon, neem dan als Cramér-Rao ondergrens $1/(n\lambda^2)$. (NB. Dit hoeft niet het correcte antwoord op vraag (b) te zijn.)

4. Een importeur van kleding trof in de laatste geïmporteerde lading broeken 10% beschadigde broeken aan. Bij de volgende grote lading wil hij weten of dit percentage nog verder is gestegen. Daartoe neemt hij uit de volgende lading een steekproef ter grootte 100 met teruglegging.
- (a) Beschrijf een statistisch model en stel een nul- en een alternatieve hypothese op.
 - (b) Beschrijf een toets om de hypothese uit (a) te toetsen bij een onbetrouwbaarheid van 0.05. Je antwoord moet ten minste bevatten: een toetsingsgrootte en een (benaderend) kritiek gebied.
 - (c) Van de 100 broeken waren er 17 beschadigd. Moet de nulhypothese verworpen worden? Geef je conclusie.

Normering:

1(a):	2	2:	3	3(a):	2	4(a):	2
1(b):	2			3(b):	3	4(b):	3
1(c):	3			3(c):	3	4(c):	1
1(d):	3						

Eindcijfer: (totaal + 3)/3