

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje. Het gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Succes!

1. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de exponentiële verdeling met onbekende parameter $\lambda > 0$.
 - (a) Bereken de maximum likelihood schatter voor λ .
 - (b) Bereken de Fisher informatie voor λ .
 - (c) Bepaal een benaderend $(1 - \alpha)100\%$ betrouwbaarheidsinterval voor λ op basis van de maximum likelihood schatter voor λ .
 - (d) Bepaal, op basis van je antwoord in (c), een benaderend $(1 - \alpha)100\%$ betrouwbaarheidsinterval voor $\text{Var}_\lambda X_i = 1/\lambda^2$.
2. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de Poisson verdeling met parameter θ en dat $Y_1, \dots, Y_n$ een steekproef is uit de Poisson verdeling met parameter 2θ , voor $\theta > 0$. De parameter θ is onbekend. De maximum likelihood schatter voor θ , alleen gebaseerd op $X_1, \dots, X_n$, is gelijk aan $\bar{X}_n$. De maximum likelihood schatter voor θ , alleen gebaseerd op $Y_1, \dots, Y_n$, is $\bar{Y}_n/2$.
 - (a) We willen θ schatten met een schatter van de vorm $T_{a,b} = a\bar{X}_n + b\bar{Y}_n$ met a en b nog te definiëren constanten ($a > 0, b > 0$). Voor welke verzameling van waarden van a en b is de schatter $T_{a,b}$ zuiver?
 - (b) Bepaal de maximum likelihood schatter voor θ op basis van de gecombineerde steekproef $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$. Is deze schatter zuiver?
 - (c) Bepaal de MSE van $T_{a,b}$. Voor welke waarden van a en b is $T_{a,b}$ zuiver en heeft $T_{a,b}$ een minimale MSE?
3. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de normale verdeling met verwachting 1 en variantie σ^2 . De maximum likelihood schatter voor σ^2 is gelijk aan $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2$.
 - (a) Bepaal de momenten schatter voor σ^2 op basis van het tweede (steekproef)moment van $X_1, \dots, X_n$.
 - (b) Laat zien dat $\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n X_i$ voldoende en volledig is voor σ^2 .
 - (c) Bepaal een UMVZ-schatter voor σ^2 .

4. We willen onderzoeken of 30-jarige mannelijke advocaten meer verdienen dan hun 30-jarige vrouwelijke collega's. Daartoe wordt aan 51 mannelijke advocaten van 30 jaar en aan 51 vrouwelijke advocaten van 30 jaar hun jaar salaris gevraagd. Definieer $X_1, \dots, X_{51}$ als het jaarsalaris van de 51 mannen en $Y_1, \dots, Y_{51}$ als het jaarsalaris van de 51 vrouwen.

- (a) Formuleer een geschikte toets om te toetsen of het jaarsalaris van 30-jarige mannelijke advocaten hoger ligt dan dat van hun vrouwelijke collega's bij een onbetrouwbaarheid van 0.05. Hebben we gepaarde of ongepaarde waarnemingen? Je antwoord moet verder ten minste bevatten: een geschikt statistisch model voor je data, de nul en de alternatieve hypothese, de toetsingsgrootheid en het kritieke gebied.
- (b) We hebben waargenomen: gemiddeld jaarsalaris mannen $\bar{x} = 36.000$ euro, steekproef standaard afwijking van de jaarsalarissen bij de mannen $s_X = 2.525$, gemiddeld jaarsalaris vrouwen $\bar{y} = 35.000$ euro, steekproef standaard afwijking van de jaarsalarissen bij de vrouwen $s_Y = 2.530$. Wordt de nulhypothese verworpen? Geef je conclusie.

Het vermoeden is dat mannen niet helemaal eerlijk zijn over de hoogte van hun salaris. Vermoedelijk geven ze een te hoog salaris op, waardoor ons onderzoek niet betrouwbaar is. Om dit vermoeden te toetsen, willen we het opgegeven salaris vergelijken met het werkelijke salaris. Veronderstel dat we van de 51 mannen in ons onderzoek ook de werkelijke jaarsalarissen hebben bemachtigd. Het werkelijke jaarsalaris van persoon i noteren we met W_i .

- (c) Formuleer een geschikte toets om ons vermoeden te toetsen bij een onbetrouwbaarheid van 0.05. Hebben we gepaarde of ongepaarde waarnemingen? Je antwoord moet verder ten minste bevatten: een geschikt statistisch model voor je data, de nul en de alternatieve hypothese, de toetsingsgrootheid en het kritieke gebied.
- (d) Definieer $Z_i = X_i - W_i$ voor $i = 1, \dots, 51$. We hebben gevonden: gemiddelde verschil is $\bar{z} = 42$ euro en de steekproef standaard afwijking van de verschillen is $s_z = 100$. Wordt de nulhypothese verworpen? Geef je conclusie.

Normering:

1(a):	2	2(a):	3	3(a):	3	4(a):	3
1(b):	3	2(b):	3	3(b):	3	4(b):	1
1(c):	3	2(c):	3	3(c):	3	4(c):	3
1(d):	2					4(d):	1

Eindcijfer: (totaal + 4)/4