

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje. Het gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Succes!

1. Stel dat $X_1, \dots, X_n$ en $Y_1, \dots, Y_n$ onafhankelijke steekproeven uit de normale verdeling zijn met verwachting μ voor beide steekproeven en variantie 1 ($\text{Var}X_i = 1, i = 1, \dots, n$) voor de eerste steekproef en variantie 4 voor de tweede steekproef ($\text{Var}Y_i = 4, i = 1, \dots, n$).

- (a) Laat zien dat de meest aannemelijke schatter voor μ gelijk is aan $4/5\bar{X} + 1/5\bar{Y}$.
- (b) Bepaal de verwachte kwadratische fout (MSE) van de meest aannemelijke schatter voor μ .
- (c) Bepaal de verwachte kwadratische fout (MSE) van de schatter $1/2\bar{X} + 1/2\bar{Y}$ voor μ .
- (d) Aan welke schatter geeft u de voorkeur? Waarom?

2. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{\theta}{2\sqrt{x}} e^{-\theta\sqrt{x}}, \quad x \geq 0,$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
- (b) Bepaal de Fisher informatie voor θ .
- (c) Bepaal een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ op basis van de meest aannemelijke schatter met onbetrouwbaarheid α .

3. Laat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit de exponentiële verdeling met onbekende parameter $1/\theta$ zijn ($\theta > 0$); de kansdichtheid is dan gelijk aan

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \quad \text{voor } x \geq 0.$$

- (a) Bepaal een momentenschatter voor θ . Is deze schatter zuiver voor θ ?
- (b) Geef een voldoende en volledige statistiek.
- (c) Bepaal een UMVZ-schatter voor θ .
- (d) Bepaal een UMVZ-schatter voor θ^2 .

4. Rokers die stoppen met roken nemen vaak toe in gewicht. Bij een onderzoek naar gewichtstoename worden n personen gewogen op het moment dat zij stopten met roken en een jaar later nog eens. Alle personen rookten gedurende het jaar niet. Men is geïnteresseerd of het gewicht na het stoppen met roken toeneemt. Definieer $X_1, \dots, X_n$ als de gewichtstoename van de n personen. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ onderling onafhankelijk en normaal verdeeld zijn met onbekende verwachting μ en bekende standaardafwijking 4.
- (a) Formuleer de bovenstaande onderzoeksvraag als een toetsingsprobleem en geef de standaard toets. Geef de toetsingsgrootte en het kritieke gebied. Gebruik een onbetrouwbaarheidsdrempel van 5%.
 - (b) Veronderstel dat in totaal 10 personen twee maal zijn gewogen. Hun gemiddelde gewichtstoename was 2.8 kilo. Voer de toets uit die beschreven staat in onderdeel (a).
 - (c) We willen dat als het verwachte toegenomen gewicht gelijk is aan 2 kilo, het onderscheidend vermogen ten minste 80% is. Hoe groot moeten we n minimaal kiezen om dit resultaat te bereiken?

Normering:

1(a):	3	2(a):	3	3(a):	2	4(a):	3
1(b):	3	2(b):	3	3(b):	3	4(b):	2
1(c):	2	2(c):	3	3(c):	2	4(c):	4
1(d):	1			3(d):	2		

Eindcijfer: (totaal + 4)/4