

Gebruik van een (niet-grafische) rekenmachine is toegestaan. Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau FEW. Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven en 1 bijlage. De normering staat bij de vragen aangegeven. Cijfer = $\frac{\text{totaal}+4}{4}$.

SUCCES!

Opgave 1 [7 punten]

Zij $X_1, \dots, X_m$ een steekproef uit de normale verdeling met verwachting μ en variantie gelijk aan 1 en $Y_1, \dots, Y_n$ een steekproef uit de normale verdeling met verwachting μ en variantie gelijk aan 2. We nemen aan dat de twee steekproeven onafhankelijk zijn.

- [1 punt] Behoren de twee genoemde normale verdelingen tot dezelfde lokatie-schaalfamilie? Beargumenteer uw antwoord.
- [1 punt] Wanneer $n = m$ kan men de punten $(X_{(i)}, Y_{(i)})$, $i = 1, \dots, n$ tekenen. Welke lijn levert dit ongeveer op?
- [1 punt] Zij $T_c = c\bar{X} + (1 - c)\bar{Y}$ met $c \in [0, 1]$ een schatter voor μ . Is deze schatter zuiver?
- [4 punten] Voor welke waarde van c is de schatter T_c optimaal? (Ga hier uit van algemene n en m , niet van $n = m$.)

Opgave 2 [10 punten]

Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de Bernoulli-verdeling met

$$P_\theta(X_i = x) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

waar $\theta \in (0, 1)$ een onbekende parameter is.

- [3 punten] Bepaal de momentenschatter voor θ^2 op basis van het eerste moment. Laat zien dat deze momentenschatter niet zuiver is voor θ^2 .
- [2 punten] Bepaal een zuivere schatter voor θ^2 op basis van je antwoord in onderdeel (a).
- [3 punten] Geef een voldoende en volledige statistiek.
- [2 punten] Bepaal een UMVZ-schatter voor θ^2 .

Opgave 3 [10 punten]

Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de verdeling met dichtheid

$$p_\theta(x) = \theta e^{-\theta(x-1)} \mathbf{1}_{x>1},$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is. Dit betreft de verschoven exponentiële verdeling: $X_i - 1$ heeft de $\exp(\theta)$ -verdeling.

- a. [3 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor θ .
- b. [3 punten] Bepaal de Fisher-informatie voor θ .
- c. [2 punten] Bereken de waargenomen (Fisher) informatie voor θ .
- d. [2 punten] Geef een benaderd betrouwbaarheidsinterval voor θ op basis van de maximum likelihood-schatter voor θ , met onbetrouwbaarheid α .

Opgave 4 [9 punten]

Op het VU-campusterrein zijn de laatste tijd een aantal eettentjes verschenen. Deze eettentjes trekken klanten, zowel VU-medewerkers als studenten. We willen onderzoeken of studenten relatief vaker naar zo'n eettentje gaan dan VU-medewerkers. Laten we aannemen dat het bekend is dat 35% van de studenten wel eens wat heeft gekocht bij de nieuwe eettentjes. We vermoeden dat dit percentage onder VU-medewerkers (p) lager is. We ondervragen willekeurig 150 VU-medewerkers. Het blijkt dat 39 van de 150 ondervraagden wel eens iets heeft gekocht bij de eettentjes.

- a. [2 punten] Formuleer voor deze situatie een geschikt statistisch model en stel een geschikte nul- en alternatieve hypothese omtrent de fractie p op.
- b. [4 punten] Toets de nulhypothese uit onderdeel (a) bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van 5%. Vermeld daarbij
 - i.) de toetsingsgrootheid
 - ii.) de verdeling (bij benadering) van de toetsingsgrootheid onder de (rand van de) nulhypothese
 - iii.) het kritieke gebied of de overschrijdingskans (p -waarde)
 - iv.) de conclusie van de toets.
- c. [3 punten] Bereken het onderscheidend vermogen in $p = 0.25$.

Bijlage 1: Tabel normale verdeling

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999
3.1	0.999	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabel 1: Verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling op het interval $[0, 4]$. De waarde in de tabel is $\Phi(x)$ voor $x = a + b/100$ met a de waarde in de eerste kolom en b het getal in de eerste rij.