| **Faculteit der Exacte Wetenschappen** | **Ringen en lichamen, deel 1** |
|---|---|
| **Vrije Universiteit** | **Deeltentamen 21-10-2015 (15:15-17:15)** |

• **Maak alle opgaven.**
• Antwoorden zonder redenering scoren slecht dus geef overal goede redeneringen.
• Als je een onderdeel niet kunt doen dan mag je het resultaat ervan in de rest van de opgave toch gebruiken.

(1) Zij $R$ de verzameling van functies op het eenheidsinterval $[0,1]$ met waardes in $\mathbb{R}$. Dit is een ring met puntsgewijze optelling en vermenigvuldiging (dus $(f+g)(a) = f(a)+g(a)$ en $(fg)(a) = f(a)g(a)$). Laat zien: elk element $h \neq 0$ in $R$ is of een nuldeler of een eenheid.

(2) Zij $R = \mathbb{Z}[i] = \{a+bi \text{ met } a,b \text{ in } \mathbb{Z}\}$, een deelring van $\mathbb{C}$. Bepaal met behulp van het uitgebreide Euclidische algoritme een grootste gemene deler $d$ van $\alpha = -2+9i$ en $\beta = 4+7i$, en schrijf $d$ in de vorm $x\alpha + y\beta$ met $x$ en $y$ in $R$.

(3) Zij $R$ een ring met 1. Laat zien: als $I$ en $J$ idealen zijn van $R$ met $I+J=R$, dan geldt $I \cap J = I \cdot J + J \cdot I$. (NB we nemen niet aan dat $R$ commutatief is.)

(4) Zij $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-7}] = \{a+b\sqrt{-7} \text{ met } a,b \text{ in } \mathbb{Z}\}$, een deelring van $\mathbb{C}$. Gegeven zijn de idealen $I = (2, 1+\sqrt{-7})$ en $J = (2)$ van $R$. Toon aan dat geldt $I \cdot I = I \cdot J$.

(5) **Formuleer in deze opgave ook de stellingen die je gebruikt.**
Zij $R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a+b\sqrt{5} \text{ met } a,b \text{ in } \mathbb{Z}\}$, een deelring van $\mathbb{R}$. Zij $\varphi : R \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ de afbeelding gegeven door $\varphi(a+b\sqrt{5}) = \overline{a+b}$.
   (a) Laat zien dat $\varphi$ een ringhomomorfisme is met kern $(\sqrt{5}-1)$.
   (b) Toon aan dat er een ringisomorfisme $R/(\sqrt{5}-1) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ is.
   (c) Bestaat er een ideaal $J$ van $R$ met $(\sqrt{5}-1) \subsetneq J \subsetneq R$?

(6) Zij $R$ de polynoomring $\mathbb{Q}[X]$. We beschouwen de idealen $I = (X+2)$, $J = (X-1)$ en $K = (X^2+X-2)$ van $R$.
   (a) Laat zien dat er een ringisomorfisme $R/K \simeq R/I \times R/J$ is.
   (b) Welk element in $R/K$ beeldt hier af op $(-5+I, 13+J)$ in $R/I \times R/J$?

(7) Zij $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a+b\sqrt{-5} \text{ met } a,b \text{ in } \mathbb{Z}\}$, een deelring van $\mathbb{C}$.
   (a) Laat zien dat $\alpha = 3$ en $\beta = 2+\sqrt{-5}$ een grootste gemene deler 1 hebben in $R$.
   (b) Toon aan dat $(\alpha, \beta) \neq (1)$.

| **Normering** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1: 8 | 2: 8 | 3: 9 | 4: 9 | 5a: 9<br>5b: 8<br>5c: 8 | 6a: 8<br>6b: 6 | 7a: 9<br>7b: 8 |
| **Maximum totaal = 90** | | | | | | |
| **Cijfer = 1 + Totaal/10** | | | | | | |