

- Maak alle negen opgaven.
- Antwoorden zonder redenering scoren slecht dus geef overal goede redeneringen.
- Als je een onderdeel niet kunt doen dan mag je het resultaat ervan in de rest van de opgave toch gebruiken.

(1) Gegeven is dat

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ met } a, c \text{ in } \{\bar{0}, \bar{2}\} \text{ en } b \text{ in } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \right\},$$

een deelring is van $M_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$, de ring van 2×2 matrices met coëfficiënten in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Bepaal het centrum $Z(R) = \{A \text{ in } R \text{ met } AB = BA \text{ voor alle } B \text{ in } R\}$ van R .

(2) Zij $G = \{e, a\}$ een groep met twee elementen, waarbij e het neutrale element is. Bepaal de nuldelers van de groepring $\mathbb{R}G$.

(3) **Formuleer in deze opgave ook de stellingen die je gebruikt.**

Zij $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \text{ met } a, b \text{ in } \mathbb{Z}\}$, een deelring van $\mathbb{C}$. Zij $\varphi : R \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ de afbeelding gegeven door $\varphi(a + b\sqrt{2}) = a + 3b$.

(a) Laat zien dat φ een ringhomomorfisme is met kern $(3 - \sqrt{2})$.

(b) Toon aan dat er een ringisomorfisme $R/(3 - \sqrt{2}) \simeq \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ is.

(c) Is $(3 - \sqrt{2})$ een maximaal ideaal van R ? Is het een priemideaal van R ?

(4) Zij R de polynoomring $\mathbb{R}[X]$. We beschouwen de idealen $I = (X^2 - 2)$, $J = (X + 2)$ en $K = (X^3 + 2X^2 - 2X - 4)$ van R .

(a) Laat zien dat er een ringisomorfisme $R/K \simeq R/I \times R/J$ is.

(b) Welk element in R/K beeldt hier af op $(X + 1 + I, 2 + J)$ in $R/I \times R/J$?

(5) Ontbind de volgende elementen in irreducibele factoren in de aangegeven ontbindingsringen. Leg hierbij goed uit waarom de factoren die je vindt irreducibel zijn.

(a) $4 - 7i$ in $\mathbb{Z}[i]$;

(b) $x^4 + 3x^3 + 2x + 1$ in $\mathbb{Q}[x]$;

(c) $x^3 - 4xy^2 + x + 2y$ in $\mathbb{Q}[x, y]$.

(6) Zij R een domein en $D \subseteq R \setminus \{0\}$ een multiplicatieve deelverzameling die 1 bevat. We zien $R \subseteq S$ via $r \mapsto \frac{r}{1}$.

(a) Laat zien: als J een ideaal van S is en $I = J \cap R$, dan is I een ideaal van R .

(b) Toon nu aan: als R een hoofdideaalring is dan is S dat ook.

(7) Bepaal de rang en de invariante factoren van de quotiëntgroep $\mathbb{Z}^3/H$ waarbij H de ondergroep is die wordt voortgebracht door de rijen van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(8) Gebruik het algoritme uit het college om een matrix P in $GL_3(\mathbb{Q})$ te vinden zo dat $P^{-1}AP$ in rationale kanonieke vorm is, waarbij

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (9) Zij $R = \mathbb{Q}[x, y]$ en beschouw de R -modulen $M = R/(x)$ en $N = R/(y)$. Laat zien: het enige R -moduulhomomorfisme $f : M \rightarrow N$ is de nulafbeelding. (Hint: M is een cyclisch R -moduul.)

Normering								
1: 4	2: 5	3a: 6	4a: 5	5a: 5	6a: 4	7: 7	8: 9	9: 8
		3b: 6	4b: 5	5b: 6	6b: 6			
		3c: 8		5c: 6				
Maximum totaal = 90								
Cijfer = 1 + Totaal/10								