

- **Maak alle opgaven.**
- Antwoorden zonder redenering scoren slecht dus geef overal goede redeneringen.
- Als je een onderdeel niet kunt doen dan mag je het resultaat ervan in de rest van de opgave toch gebruiken.

- (1) Zij $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \text{ met } a \text{ en } b \text{ in } \mathbb{Z}\}$, de gehelen van Gauß, met norm $N(a + bi) = a^2 + b^2$.
 - (a) Bepaal een grootste gemene deler van $7 + i$ en $13 - 11i$.
 - (b) Bepaal een ontbinding in $\mathbb{Z}[i]$ in irreducibele factoren van $7 + i$, $7 + 2i$ en $7 + 3i$.
- (2) Ontbind de volgende polynomen in irreducibele factoren in de aangegeven ontbindingsringen. **Formuleer hierbij de stellingen die je gebruikt.**
 - (a) $x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 2$ in $\mathbb{Q}[x]$;
 - (b) $x^4 - y^4 + 1$ in $\mathbb{Q}[x, y]$.
- (3) Zij R de ring $D^{-1}\mathbb{Z}$ waarbij $D = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots\}$.
 - (a) Laat zien: de irreducibele elementen van R zijn de elementen geassocieerd met $\frac{p}{1}$ met p een oneven priemgetal.
 - (b) Toon aan dat R een ontbindingsring is.
- (4) Bepaal de rang en de invariante factoren van de quotiëntgroep $\mathbb{Z}^4/H$ waarbij H de ondergroep is die wordt voortgebracht door de rijen van de matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \\ -1 & -6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

- (5) Gebruik het algoritme uit het college om een matrix P in $GL_3(\mathbb{Q})$ te vinden zo dat $P^{-1}AP$ in rationale kanonieke vorm is, waarbij

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (6) Als A een element van $M_3(\mathbb{Q})$ is dan heet een lineaire deelruimte V van $\mathbb{Q}^3$ A -stabiël als v in V impliceert dat Av in V is. Als A minimumpolynoom $x^3 + x^2 - x - 1$ heeft, wat is dan het aantal A -stabiele lineaire deelruimten van $\mathbb{Q}^3$? (Hint: beschouw $\mathbb{Q}^3$ als $\mathbb{Q}[x]$ -moduul waarbij $x^n v = A^n v$ en factoriseer $x^3 + x^2 - x - 1$ in $\mathbb{Q}[x]$.)

Normering					
1a: 7	2a: 11	3a: 9	4: 9	5: 14	6: 12
1b: 9	2b: 11	3b: 8			
Maximum totaal = 90					
Cijfer = 1 + Totaal/10					