

- **Maak alle opgaven.**
- Antwoorden zonder redenering scoren slecht dus geef overal goede redeneringen.
- Als je een onderdeel niet kunt doen dan mag je het resultaat ervan in de rest van de opgave toch gebruiken.

(1) Zij k een lichaam. Gegeven is dat

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ met } a, b, c \text{ in } k \right\}$$

een deelring is van $M_2(k)$, de ring van 2×2 matrices met coëfficiënten in k .

- (a) Laat zien dat R een niet-commutatieve ring met $1 \neq 0$ is.
- (b) Bepaal de eenheden en de nuldelers van R .
- (2) Zij $G = \{e, a\}$ een groep met twee elementen, waarbij e het neutrale element is. Bepaal alle idealen van de groepring $\mathbb{R}G$.
- (3) Zij $\varphi : R \rightarrow S$ een ringhomomorfisme en J een ideaal van S . Laat zien dat

$$\varphi^{-1}(J) = \{r \text{ in } R \text{ met } \varphi(r) \text{ in } J\}$$

een ideaal van R is.

- (4) Zij $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-7}] = \{a + b\sqrt{-7} \text{ met } a, b \text{ in } \mathbb{Z}\}$, een deelring van $\mathbb{C}$. Laat zien dat het ideaal $(2, 1 + \sqrt{-7})$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ *geen* hoofdideaal ('principal ideal') is. (Hint: gebruik dat de norm N met $N(a + b\sqrt{-7}) = a^2 + 7b^2$ multiplicatief is.)
- (5) **Formuleer in deze opgave ook de stellingen die je gebruikt.**
Zij $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \text{ met } a, b \text{ in } \mathbb{Z}\}$, een deelring van $\mathbb{C}$. Zij $\varphi : R \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ de afbeelding gegeven door $\varphi(a + b\sqrt{-5}) = \overline{a - b}$.
 - (a) Laat zien dat φ een ringhomomorfisme is met kern $(3, 1 + \sqrt{-5})$.
 - (b) Toon aan dat er een ringisomorfisme $R/(3, 1 + \sqrt{-5}) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ is.
 - (c) Is $(3, 1 + \sqrt{-5})$ een maximaal ideaal van R ? Is het een priemideaal van R ?
- (6) Zij R de polynoomring $\mathbb{R}[X]$. We beschouwen de idealen $I = (X^2 + 1)$, $J = (X + 1)$ en $K = (X^3 + X^2 + X + 1)$ van R .
 - (a) Laat zien dat er een ringisomorfisme $R/K \simeq R/I \times R/J$ is.
 - (b) Welk element in R/K beeldt hier af op $(2X + 1 + I, 3 + J)$ in $R/I \times R/J$?
- (7) Zij R een ring (niet noodzakelijkerwijs commutatief of met 1) met idealen I en J . Zij $\varphi : R \rightarrow R/I \times R/J$ gegeven door $x \mapsto (x + I, x + J)$. Laat zien: φ is surjectief dan en slechts dan als $I + J = R$.

Normering						
1a: 6	2: 10	3: 7	4: 10	5a: 8	6a: 6	7: 10
1b: 8				5b: 8	6b: 7	
				5c: 10		
Maximum totaal = 90						
Cijfer = 1 + Totaal/10						