

Inleiding PDV (deel)tentamen (401023/400163), 3 studiepunten. 22-3-2011, 12.00-14.00.

Geen formulebladen, geen rekenmachines. 4 punten voor som 1; 2 punten elk voor som 2,3,4,5. Totaal 12. Cijfer maximaal 10 en minimaal 1. Werk netjes, geef uitleg bij wat je doet. Succes!

1. De Fouriersinusreeks van een 2π -periodieke oneven functie f is

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

- (a) Geef een formule voor b_n van de vorm

$$b_n = \dots \int_0^{\pi} f(x) \dots dx$$

- (b) De gelijkheid van Parseval geeft een verband tussen

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \quad \text{en} \quad \int_0^{\pi} f(x)^2 dx.$$

Wat is die gelijkheid in dit geval?

- (c) Bereken alle coëfficiënten van de Fourierreeks van de 2π -periodieke oneven functie f gegeven door $f(x) = 1$ (waarbij $0 < x < \pi$).
(d) In welke x is deze Fourierreeks convergent?
(e) Bereken

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

- (f) Bereken

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

2. Bepaal met behulp van poolcoördinaten de oplossing van

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

waarvoor $u(x, y) = xy$ op de cirkel $x^2 + y^2 = 1$.

3. Voor $u = u(x, t)$ wordt de gedempte golfvergelijking gegeven door

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Hier is $k > 0$ een parameter. In deze som is $0 < x < L$ waarbij $L > 0$ vast gekozen is. De randvoorwaarden zijn $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Onderzoek oplossingen van de vorm $u(x, t) = T(t)X(x)$. Voor welke k zijn er zulke niet-triviale oplossingen die niet oscilleren in de tijd?

4. Beschouw voor $u = u(x, t)$, zonder restricties op x en t , de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

De oplossing met beginvoorwaarden

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0$$

wordt gegeven door $u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+t) + f(x-t))$.

- (a) Neem aan dat f een 2π -periodieke oneven functie is met $f(x) = 1$ (waarbij $0 < x < \pi$) en $f(0) = f(\pi) = 0$. Geef met een schets in het (x, t) -vlak aan waar de bijbehorende oplossing $u(x, t)$ gelijk is aan 0.
- (b) Geef een Fourierreeks voor de oplossing $u(x, t)$ in onderdeel 4a.
5. Voor elke continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is er een unieke oplossing $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ van $-u''(x) = f(x)$ die voldoet aan $u'(0) - u(0) = u'(1) + u(1) = 0$. We schrijven $u = Af$. Dus A is de afbeelding die aan f de bijbehorende oplossing u toevoegt. Laat zien dat voor continue $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_0^1 (Af(x))g(x)dx = \int_0^1 f(x)(Ag(x))dx.$$