

Inleiding PDV, 27-5-2009, 15.15-17.15/18.00.

Geen formulebladen, geen rekenmachines. Werk netjes, geef uitleg bij wat je doet. Succes!

Tweede deeltentamen: maak som 2,3,4. 2 punten voor 2,3a,3c,4a,4b, 1 punt voor 3b,4c, cijfer totaal aantal punten keer 10/11, maximaal 10.

Heel tentamen: maak som 1,2,3,4. 2 punten voor 1b,2,3a,3c,4a,4b, 1 punt voor 1a,1c,3b,4c, cijfer totaal aantal punten keer 2/3, maximaal 10.

1. We schrijven

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

voor de Fouriercosinusreeks van een 2π -periodieke even functie f .

- (a) Geef een formule voor a_n van de vorm

$$a_n = \dots \int_0^{\pi} f(x) \dots dx$$

- (b) Bereken, met behulp van 1a en $f(x) = \pi - x$ (waarbij $0 \leq x \leq \pi$),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^2}.$$

- (c) Bereken, met behulp van de gelijkheid van Parseval,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^4}.$$

2. Bepaal met behulp van poolcoördinaten ($x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$) de oplossing van $-\Delta u = 1$ op $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ waarvoor $u = 0$ op de cirkel $x^2 + y^2 = 1$. Hint: hangt de oplossing van ϕ af?

3. Voor $u = u(x, t)$ wordt de gedempte golfvergelijking gegeven door

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Hier is $k > 0$ een parameter. In deze som nemen we $0 < x < \pi$ en randvoorwaarden $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Denk bijvoorbeeld aan een gitaarsnaar.

- (a) Bepaal alle oplossingen van de vorm $u(x, t) = h(t)\phi(x)$.
- (b) Voor welke k zijn alle (niet-evenwichts)oplossingen in 3a oscillerend in de tijd?
- (c) Beschouw nu voor $u = u(x, y, t)$ de PDV

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

We nemen $(x, y) \in \Omega$, waarbij Ω een begreënsd gebied met gladde rand is, en randvoorwaarde $u = 0$ op de rand $\partial\Omega$ van Ω . Voor welke k zijn er (niet-evenwichts)oplossingen van de vorm $u(x, y, t) = h(t)\phi(x, y)$ die niet oscillerend zijn in de tijd? Hint: gebruik scheiding van variabelen en de eigenfuncties en eigenwaarden van min de Laplaciaan met Dirichlet randvoorwaarde nul:

$$-\Delta\phi_n = \lambda_n\phi_n \quad \text{in } \Omega, \quad \phi_n = 0 \quad \text{op } \partial\Omega.$$

4. Voor elke continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is er een unieke oplossing $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ van $-u''(x) = f(x)$ die voldoet aan $u'(0) - u(0) = u'(1) + u(1) = 0$. We schrijven $u = Af$. Dus A is de afbeelding die aan f de bijbehorende oplossing u toevoegt.

- (a) Bepaal de formule voor $G(x, y)$ waarmee geldt dat

$$u(x) = (Af)(x) = \int_0^1 G(x, y)f(y)dy.$$

- (b) Laat zien dat er een inproduct $((\cdot, \cdot))$ bestaat zo dat de hierboven genoemde oplossing u voldoet aan

$$((u, v)) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

voor alle continu differentieerbare $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- (c) Laat zien dat voor continue $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_0^1 (Af(x))g(x)dx = \int_0^1 f(x)(Ag(x))dx.$$