

Tentamen OR1, Deel 2, 21-12-2016

REKENMACHINE (SIMPELE POCKET CALCULATOR) IS TOEGESTAAN. ENIG ANDER APPARAAT, ZOALS GRAFISCHE REKENMACHINE, MOBIEL TELEFOON, ETC. NIET

Puntentoekening

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven, waaruit in totaal 75 punten te behalen zijn.

	a	b	c	d
Exc. 1	5	10	5	5
Exc. 2	15	-	-	-
Exc. 3	5	15	-	-
Exc. 4	5	5	5	-

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{totale aantal punten} + 5}{8}$$

Opgave 1.

Gegeven is het volgende LP-probleem.

$$\begin{array}{llllll} \max & Z & = & 3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 \\ \text{s.t.} & & & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq & 10 \\ & & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & \leq & 8 \\ & & & x_1 & - & x_2 & & & + & 2x_4 & \leq & 4 \\ & & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

- (a) Voeg slackvariabelen s_1, s_2 en s_3 toe om het probleem in standaardvorm te zetten en maak één iteratie van de simplex methode.
- (b) In de optimale basis toegelaten oplossing (basic feasible solution) van het primale probleem zijn x_3 , s_2 en x_1 (in deze volgorde) de basis variabelen. De corresponderende inverse basis matrix is

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bereken de optimale oplossing met de waarde. Dus laat zien hoe je deze berekent. Alleen de oplossing geven wordt fout gerekend!

- (c) Stel dat de doelstellingscoëfficiënt van x_4 verandert van 2 naar 3. Blijft de oplossing bij (b) gevonden optimaal? Beargumenteer je antwoord! Alleen een ja- of nee-antwoord wordt fout gerekend.
- (d) Stel dat aan het LP-probleem geheeltaligheidseisen aan alle variabelen worden toegevoegd. In het optimale simplex tableau blijkt er in de rij behorend bij basis variabele x_3 de volgende gelijkheid af te lezen:

$$\frac{1}{3}x_2 + x_3 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_3 = \frac{2}{3}.$$

Dus x_3 heeft een niet geheeltalige waarde. Leid een fractionele snede (fractional cut) af.

Opgave 2. *Goede onderdelen van het model in deze opgave leveren al punten op*

Iedere ochtend bekijkt drukkerij SnelPrint de aanvragen voor 3D-print jobs voor die dag. Voor iedere job is bekend hoeveel tijd het op een 3D-printer in beslag neemt en hoeveel het opbrengt. Een specialistische drukker wordt ingehuurd en per tijdseenheid (per minuut) betaald voor het controleren van de twee 3D-printers die het bedrijf heeft. Dus zolang er minstens één printer werkt wordt deze specialist betaald. De twee printers zijn identiek. Maar iedere job moet in zijn geheel op één van de printers plaatsvinden want 3D-print jobs kunnen niet onderbroken worden.

Iedere ochtend besluit de drukkerij daarom welke jobs ze zullen uitvoeren en hoe die te verdelen over de twee printers, zodanig dat de netto opbrengsten gemaximaliseerd worden. De jobs die niet uitgevoerd worden die dag gaan verloren.

Hierbij moet rekening gehouden worden met het feit dat aan de specialist een garantie gegeven is dat hij per dag voor minstens 4 uur=240 minuten betaald zal worden.

Formuleer dit probleem als een lineair of geheeltallig lineair programmeringsprobleem. Hiertoe kan je gebruiken dat er op een dag n jobs zijn, dat iedere job j een printtijd van p_j minuten vraagt en, indien volbracht, r_j oplevert en tenslotte dat de specialist c per minuut kost.

Hint: het is handig om een variabele t in te voeren voor de tijd dat de specialist aan het werk is.

Opgave 3.

Beschouw het volgende 0-1 knapsack probleem.

$$\begin{aligned} \max \quad & 14x_1 + 15x_2 + 5x_3 + 20x_4 \\ \text{s.t. :} \quad & 8x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 10x_4 \leq 18 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- (a) Geef de unieke oplossing van de LP-Relaxatie van dit probleem. Geef ook de corresponderende optimale doelstellingswaarde van de LP-Relaxatie.
- (b) Los het gegeven 0-1 knapsack probleem op met behulp van Branch&Bound. Geef duidelijk aan in welke volgorde je de knopen in de zoekboom berekent en waar je snoeit en op grond van welk criterium je snoeit.

Opgave 4.

- (a) Formuleer het duale probleem van het volgende primale probleem

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Hint: Let op dat de functionele restricties gelijkheden zijn zonder slack-variabelen.

- (b) Formuleer en bewijs de zwakke dualiteitsstelling voor deze problemen.
- (c) Bij het probleem van onderdeel (a), voeg toe dat de variabelen geheeltallig moeten zijn. Formuleer dan de Lagrange Duale van het primale probleem door alle functionele restricties te dualiseren. Beargumenteer dat in dit geval de Lagrange Duale geen betere grenzen zal geven dan de LP-relaxatie.