

Tentamen Besliskunde, 25-03-2014
REKENMACHINE IS NIET TOEGESTAAN

Puntentoekening

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven, waaruit in totaal 80 punten te behalen zijn.

<i>Opgave</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
Opg. 1	5	10	-
Opg. 2	10	-	-
Opg. 3	5	10	-
Opg. 4	5	10	5
Opg. 5	10	-	-
Opg. 6	10	-	-

Tentamencijfer

$$\frac{\text{totale aantal punten}}{8}$$

Eindcijfer

$$\frac{1}{4}\text{Eindcijfer toetsen} + \frac{3}{4}\text{Tentamencijfer}$$

Opgave 1

Beschouw het LP-probleem

$$\begin{array}{ll} \max & 6x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ \text{onder} & 4x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 20 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

- (a) Breng dit LP-probleem in de standaard basisvorm. Geef de startoplossing voor de simplex-algoritme en pas **één** iteratie toe om vanuit deze startoplossing een verbeterde basisoplossing te vinden. Geef op overzichtelijke en beargumenteerde wijze aan hoe u deze verbeterde basisoplossing construeert en wat de bijbehorende basisvorm van het LP-probleem is.
- (b) Wat zijn de nieuwe basisvariabelen? Wat zijn hun waarden en wat is de nieuwe criteriumwaarde? Hoe kunt u uit de nieuwe basisvorm aflezen of de gevonden oplossing optimaal is? Is dit hier het geval?

Uitwerking Opgave 1

(a) Standaardvorm:

$$\max z = 6x_1 - 3x_2 + 5x_3$$

$$\begin{array}{rcccccccc} \text{onder} & 4x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 20 \\ & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & + & x_5 & = & 4 \\ & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 9 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & \geq & 0 \end{array}$$

Startoplossing: $(0, 0, 0, 20, 4, 9)$ met criteriumwaarde $z = 0$

Iteratie 1:

In de basis: $x_1 = \min(\frac{20}{4}, \frac{4}{1}, \frac{9}{2}) = 4$. Uit de basis: x_5 .

$$\max 6(4 - x_2 - 3x_3 - x_5) - 3x_2 + 5x_3 = 24 - 9x_2 - 13x_3 - 6x_5$$

$$\begin{array}{rcccccccc} \text{onder} & & & & - & 11x_3 & + & x_4 & - & 4x_5 & & = & 4 \\ & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & + & x_5 & & = & 4 \\ & & - & 3x_2 & - & 5x_3 & & & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & \geq & 0 \end{array}$$

(b) De nieuwe basisvariabelen zijn x_1 , x_4 en x_6 met waardes

$$x_1 = 4$$

$$x_4 = 4$$

$$x_6 = 1$$

en criteriumwaarde $z = 24$ (de constante in de criteriumfunctie).

Als er in de nieuwe basisvorm nog variabelen met positieve coëfficiënt in de criteriumfunctie zijn, dan is de gevonden oplossing nog niet optimaal; de criteriumwaarde kan immers verhoogd worden door de waarde van een variabele met positieve coëfficiënt te verhogen.

In de nieuwe basisvorm die hier gevonden is hebben alle variabelen in de criteriumfunctie een negatieve coëfficiënt. De gevonden oplossing is dus optimaal.

Opgave 2. *Bedenk goed dat u voor goede onderdelen van het model in deze opgave al punten kunt verdienen*

Kardolus Airlines vliegt continu de volgende route: L.A. - Houston - New York - Miami - L.A. De afstand (in mijlen) van elk segment van deze route is weergegeven in de volgende tabel.

Segment	Afstand
Los Angeles - Houston	1500
Houston - New York	1700
New York - Miami	1300
Miami - Los Angeles	2700

Bij elke stop kan het vliegtuig hoogstens 10.000 gallons kerosine bijtanken. De prijzen per gallon (in dollars) zijn in de verschillende steden als volgt.

Stad	Prijs per gallon
Los Angeles	0.88
Houston	0.15
New York	1.05
Miami	0.95

De tank van het vliegtuig kan hoogstens 12.000 gallons kerosine bevatten. We eisen dat bij aankomst in een stad de tank altijd nog minstens 600 gallons bevat om eventueel rondcirkelen boven het vliegveld mogelijk te maken. Het aantal gallons dat per mijl op elk segment van de route verbruikt wordt, wordt gegeven door:

$$1 + (\text{gemiddeld kerosine niveau op segment}/2000),$$

waarbij het gemiddeld kerosine niveau (in gallons) op een segment gelijk is aan:

$$\frac{(\text{kerosine niveau bij start segment}) + (\text{kerosine niveau bij eind segment})}{2}.$$

Het doel is de totale tank-kosten te minimaliseren van de route. Je mag er vanuit gaan dat het vliegtuig telkens na aankomst in Los Angeles weer direct dezelfde route gaat vliegen.

Formuleer dit probleem als een lineair programmeringsprobleem. Geef duidelijk de betekenis van je gekozen beslissingsvariabelen aan.

Hint: Gebruik onder andere de volgende beslissingsvariabelen: x_j = aantal gallons in de tank van het vliegtuig bij vertrek uit stad j , $j = 1; 2; 3; 4$.

Uitwerking Opgave 2 We definiëren de volgende beslissingsvariabelen:

x_j = aantal gallons in de tank van het vliegtuig bij vertrek uit stad j , $j = 1, 2, 3, 4$;

y_j = aantal gallons in de tank van het vliegtuig bij aankomst in stad j , $j = 1, 2, 3, 4$;

waarbij geldt dat stad 1 = Los Angeles, 2 = Houston, 3 = New York en 4 = Miami.

Het probleem kan worden geformuleerd als volgt:

$$\min 0.88(x_1 - y_1) + 0.15(x_2 - y_2) + 1.05(x_3 - y_3) + 0.95(x_4 - y_4)$$

$$\text{onder } x_1 \geq \left(\frac{x_1 + y_2}{4000} + 1 \right) \cdot 1500 + 600$$

$$y_2 = x_1 - \left(\frac{x_1 + y_2}{4000} + 1 \right) \cdot 1500$$

$$x_2 \geq \left(\frac{x_2 + y_3}{4000} + 1 \right) \cdot 1700 + 600$$

$$y_3 = x_2 - \left(\frac{x_2 + y_3}{4000} + 1 \right) \cdot 1700$$

$$x_3 \geq \left(\frac{x_3 + y_4}{4000} + 1 \right) \cdot 1300 + 600$$

$$y_4 = x_3 - \left(\frac{x_3 + y_4}{4000} + 1 \right) \cdot 1300$$

$$x_4 \geq \left(\frac{x_4 + y_1}{4000} + 1 \right) \cdot 2700 + 600$$

$$y_1 = x_4 - \left(\frac{x_4 + y_1}{4000} + 1 \right) \cdot 2700$$

$$x_1 - y_1 \leq 10000$$

$$x_2 - y_2 \leq 10000$$

$$x_3 - y_3 \leq 10000$$

$$x_4 - y_4 \leq 10000$$

$$x_1 \leq 12000$$

$$x_2 \leq 12000$$

$$x_3 \leq 12000$$

$$x_4 \leq 12000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0.$$

Opgave 3.

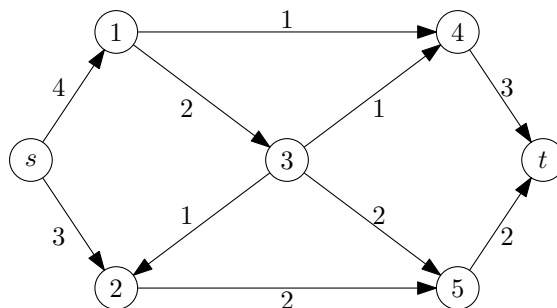
Beschouw het volgende 0-1 knapzak probleem.

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 2x_4 \\ \text{onder :} \quad & 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 1x_4 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- (a) Geef de unieke oplossing van de LP-Relaxatie van dit probleem. Geef ook de bijbehorende optimale criteriumwaarde van de LP-Relaxatie.
- (b) Los het bovenstaande 0-1 knapzak probleem op met behulp van Branch en Bound en vind op deze manier de optimale oplossing met de bijbehorende optimale criteriumwaarde.

Opgave 4.

Beschouw het netwerk in de figuur. Het nummer bij een pijl geeft de capaciteit van de pijl aan. We gaan met behulp van Ford-Fulkerson de maximum stroom in dit netwerk van knoop s naar knoop t berekenen.



In de eerste twee iteraties van Ford-Fulkerson zijn de volgende stroom vermeerderende paden gevonden:

- $s, 1, 4, t$ met bottleneck capaciteit 1 vanwege pijl $(1, 4)$;
- $s, 1, 3, 5, t$ met bottleneck capaciteit 2 vanwege pijlen $(1, 3)$, $(3, 5)$ en $(5, t)$.

Dus, we hebben nu een stroom van 3 vanuit s naar t .

- Bereken voor ieder van de kanten hoeveel stroom er nu doorheen gaat na deze twee iteraties. (*Hint: dit is gewoon een heel gemakkelijke vraag; zoek er niets achter.*)
- Zoals je na kunt gaan is er geen stroom vermeerderende pad wat alleen gebruik maakt van voorwaartse pijlen. Zet de zoektocht naar stroomvermeerderende paden voort, ofwel door het formuleren van het residuele netwerk behorend bij de stroom berekend in (a), ofwel door gebruik te maken van de labeling methode uit het boek, maar in beide gevallen uitgaand van de stroom die we bij (a) al door het netwerk gestuurd hebben. (Dus niet vanaf stroom 0 beginnen!) Doe dit tot er geen stroomvermeerderende paden meer bestaan en geconcludeerd kan worden dat de optimale oplossing gevonden is. (*Hint1: Gebruik gerust de figuur om de informatie en het residuele netwerk in weer te geven. Hint2: Als je het goed doet ben je al na 1 iteratie klaar.*)
- Check correctheid van je antwoord door de bijbehorende minimum s - t -snede te vinden en zijn grootte te bepalen. Geef goed aan hoe je aan de snede komt.

Uitwerking Opgave 4

- De positieve stroom staat in de volgende tabel: iedere pijl niet in de tabel heeft stroom 0.

pijl	stroom
$(s,1)$	3
$(1,4)$	1
$(1,3)$	2
$(3,5)$	2
$(4,t)$	1
$(5,t)$	2

- (b) In het residuele netwerk, komen de volgende pijlen voor, met F aanduidend een voorwaartse pijl en B een terugwaartse pijl, en met hun (rest)capaciteiten:

pijl	F of B	stroom
(s,1)	F	1
(1,s)	B	3
(s,2)	F	3
(3,1)	B	2
(3,2)	F	1
(4,1)	B	1
(3,4)	F	1
(5,3)	B	2
(2,5)	F	2
(4,t)	F	2
(t,4)	B	1
(t,5)	B	2

In deze residuele graaf bestaat het s - t -pad $s, 2, 5, 3, 4, t$ met bottleneck capaciteit 1 (de capaciteit van pijl (3, 4)). Dus we verhogen de stroom met 1 op de F-pijlen op het pad en verlagen de stroom met 1 op de B-pijlen op het pad. Dit geeft de oplossing:

pijl	stroom
(s,1)	3
(s,2)	1
(1,3)	2
(2,5)	1
(3,4)	1
(3,5)	1
(5,t)	2
(4,t)	3

De stroom op alle andere pijlen is 0.

De nieuwe residuele graaf is

pijl	F of B	stroom
(s,1)	F	1
(1,s)	B	3
(s,2)	F	2
(2,s)	B	1
(3,1)	B	2
(3,2)	F	1
(4,1)	B	1
(4,3)	F	1
(3,5)	B	1
(5,3)	B	1
(2,5)	F	1
(5,2)	B	1
(4,t)	F	1
(t,4)	B	2
(t,5)	B	2

In deze graaf is t niet meer te bereiken vanuit s . Dus we hebben de optimale

oplossing bereikt met een stroom van 4.

- (c) In de residuele graaf behorend bij de optimale stroom zijn vanuit s wel te bereiken de knopen 1, 2, 3, 5. Deze vormen de snede S , met een totale capaciteit de som van de capaciteiten van de pijlen (1, 4), (3, 4), en (5, t) dus $1 + 1 + 2 = 4$.

Opgave 5.

Vat de getallen uit de figuur van **Opgave 4** op als lengtes van de corresponderende pijlen. Vind dan het kortste pad van s naar t . Laat goed zien hoe je Dijkstra's algoritme hiervoor gebruikt.

Uitwerking Opgave 5

The iteraties van Dijkstra's algoritme zijn beschreven in het volgende tabel:

S	D(s)	D(1)	D(2)	D(3)	D(4)	D(5)	D(t)
$\emptyset$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
{s}		4	3, s	∞	∞	∞	∞
{s, v_1 }		4, s		∞	∞	5	∞
{s, v_1 , v_2 }				6	5, v_1	5	∞
{s, v_1 , v_2 , v_4 }				6		5, v_2	8
{s, v_1 , v_2 , v_4 , v_5 }				6, v_1			7
{s, v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 }							7, v_5
{s, v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 , t }							

Bij de laatste iteratie, $t \in S$ en $D(t) = 7$. Dus we kunnen concluderen dat het kortste pad van s naar t het pad {s, 2, 5, t} is en deze een lengte van 7 heeft.

Opgave 6.

Een groep N huisartsen heeft besloten om samen te gaan werken. Echter willen ze dat iedere patient één van de artsen als eerste aanspreekpunt krijgt toegewezen. Ze willen de gehele verzameling van M patienten herverdelen. Voor iedere patient i is op grond van het verleden een geschatte hoeveelheid werk T_i vastgesteld, uitgedrukt in benodigde tijd per jaar, waarbij T_i afgerond is op halve uren. Daarnaast is bij de verdeling de afstand van de patienten naar de huisartsen praktijk van belang: de afstand tussen de praktijk van huisarts j en het adres van patient i is d_{ij} [$i = 1, 2, \dots, M; j = 1, \dots, N$]. Huisarts j wil in zijn praktijk een verzameling patienten die hooguit bij elkaar een geschatte hoeveelheid werk van t_j uur per jaar vragen, [$j = 1, \dots, N$]. De huisartsen willen de patienten zodanig verdelen dat de som van de afstanden die de patienten naar de aan hen toegewezen huisarts moeten afleggen minimaal is.

Formuleer dit probleem als een dynamisch programmeringsprobleem. Beschrijf daarvoor in ieder geval de toestand, de interpretatie van de waardefunctie in woorden, de recursierelatie, de start-recursie en wat je moet berekenen in termen van de waardefunctie. **Hint:** Begin met stadium j .

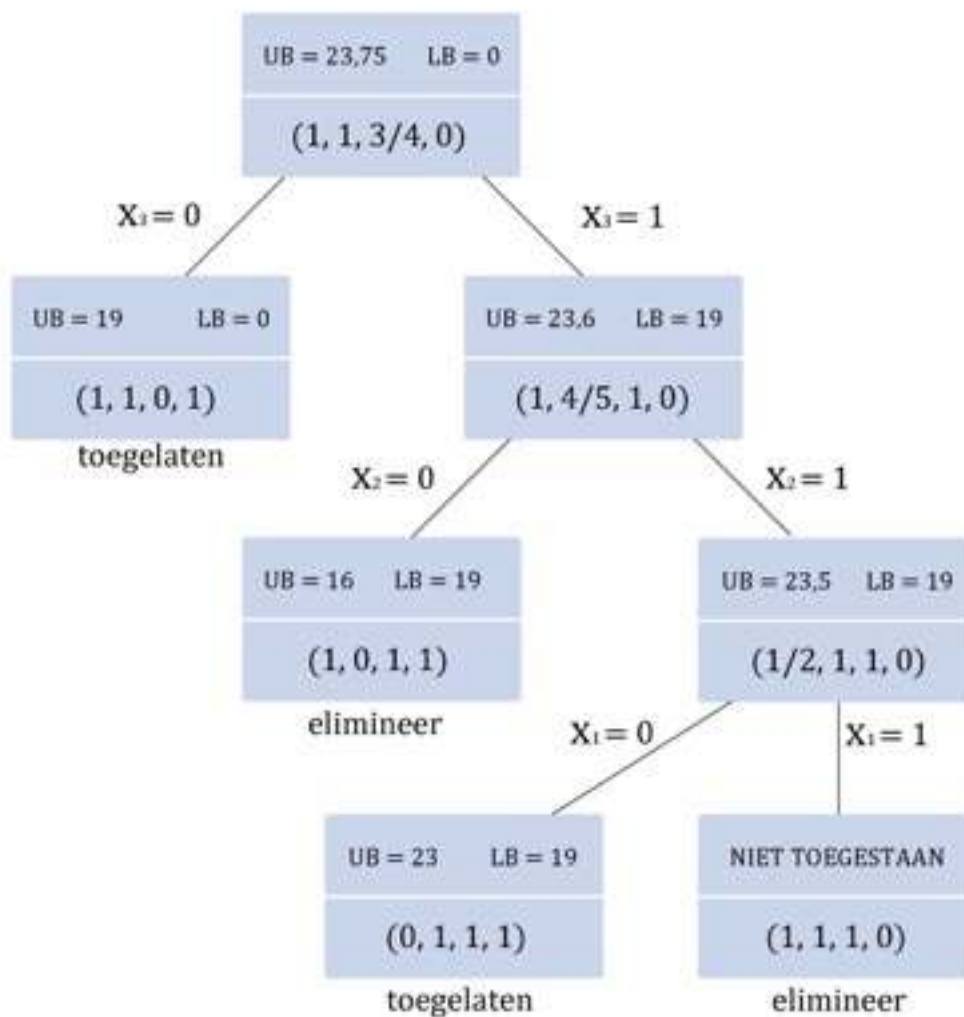
Uitwerking opgave 3

(a) Er geldt:

Dus het staat al op de goede volgorde.

De LP-relaxatie wordt dan gegeven door:

En geeft criteriumwaarde:



Optimale oplossing:

Optimale criteriumwaarde:

Uitwerking opgave 6

Stadium: j , het moment waarop we aan $j-1$ huisartsen patiënten hebben toegewezen en op het punt staan patiënten aan huisarts j toe te wijzen.

Toestand: S , de verzameling patiënten die nog toegewezen moeten worden in stadium j

Beslissing: De verzameling P patiënten die we toewijzen aan huisarts j . De mogelijke beslissingen worden dan gegeven door:

Directe kosten: De afstand die de patiënten in P totaal moeten afleggen naar huisarts j :

Toestandstransformatie:

Waardefunctie:

Waardefunctie:

Startrecursie:

Te berekenen: