

# Tentamen Inleiding Besliskunde II

22-3-2011, 12:00 - 14:45

REKENMACHINE ZONDER GEHEUGENOPSLAG IS TOEGESTAAN

## Puntentoekening

Dit tentamen bestaat uit 4 pagina's en uit 4 opgaven, waaruit 100 punten te behalen zijn. Voor een voldoende zijn minstens 55 van de 100 punten vereist. **Let op:** Opgave 3B is lastig, het is daarom handig eerst de andere opgaven te proberen.

| <i>Opgave</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> |
|---------------|----------|----------|----------|----------|
| Opg. 1        | 10       | 7.5      | 7.5      | -        |
| Opg. 2        | 5        | 15       | -        | -        |
| Opg. 3        | 15       | 15       | -        | -        |
| Opg. 4        | 10       | 10       | 5        | -        |

## Opgave 1: Netwerken

Een groep van  $N$  studenten is na het afstuderen over de hele wereld uitgewaaierd, zodat het moeilijk wordt de onderlinge contacten te handhaven. Vanwege de hechte vriendschapsbanden die ze tijdens hun studentenjaren met elkaar hebben opgebouwd vindt iedereen het gewenst een soort netwerk in stand te houden zodat ze elkaar snel kunnen bereiken en in het bijzonder elkaar boeken kunnen toesturen. Als student  $i$  een boek wil sturen naar student  $j$  kost dat met een snelpostservice een bedrag  $c_{ij}$  als het linea recta van student  $i$  naar student  $j$  gestuurd wordt. Het is echter mogelijk dat dit bedrag lager is als het boek bijvoorbeeld eerst van student  $i$  naar een andere student  $k$  gestuurd wordt en vervolgens van student  $k$  naar student  $j$ . Omdat de snelpostservice EMS alle routes tussen elk tweetal studenten voor eens en voor altijd wil vastleggen, vraagt EMS de studenten uit te zoeken welke 'wegen' in het netwerk op te nemen. De studenten willen uiteraard dat netwerk opgeven waarvoor de komende jaren de totale verzendkosten minimaal zullen zijn. Uitgangspunt is dat elk tweetal studenten elkaar regelmatig boeken toestuurde.

**1A)** Met welke algoritme kunnen we dit probleem oplossen? Beschrijf dit algoritme gedetailleerd in algemene termen.

**1B)** Laat in onderstaande Tabel 1 (**Z.O.Z.**) voor een groep van 10 studenten de directe kosten  $c_{ij}$  gegeven zijn. Bepaal met de in onderdeel **1A)** bedoelde algoritme nu het voor de studenten optimale netwerk. Teken het weggennet dat je gevonden hebt.

**1C)** Bewijs de correctheid van het algoritme van Prim.

**Z.O.Z.**

Table 1: Directe Kosten  $c_{ij}$ 

| $i / j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1       | - | 5 | 3 | 8 | 3 | 1 | 4 | 3 | 5 | 2  |
| 2       | - | - | 1 | 4 | 3 | 3 | 2 | 4 | 5 | 8  |
| 3       | - | - | - | 2 | 5 | 4 | 1 | 3 | 7 | 4  |
| 4       | - | - | - | - | 4 | 6 | 7 | 3 | 1 | 3  |
| 5       | - | - | - | - | - | 5 | 4 | 6 | 5 | 2  |
| 6       | - | - | - | - | - | - | 4 | 5 | 6 | 3  |
| 7       | - | - | - | - | - | - | - | 3 | 2 | 6  |
| 8       | - | - | - | - | - | - | - | - | 5 | 7  |
| 9       | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 2  |

## Opgave 2: Branch & Bound

Beschouw het volgende knapzak probleem.

$$\begin{aligned} \max \quad & 20x_1 + 5x_2 + \frac{7}{2}x_3 + 10x_4 \\ \text{onder:} \quad & 11x_1 + 4x_2 + \frac{5}{2}x_3 + 6x_4 \leq 21 \\ & x_i \geq 0 \text{ én geheel} \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

**2A)** Geef de oplossing van de LP-relaxatie van dit probleem. Geef ook de bijbehorende optimale criteriumwaarde  $z_{LP}^*$ .

**2B)** Los het bovenstaande knapzak probleem op met Branch en Bound en vind op deze manier de optimale oplossing en optimale criteriumwaarde van het bovenstaande probleem, gebruik aan het begin van je boom Upperbound =  $z_{LP}^*$  van **3A)** en Lowerbound = 0. ***Tip:** Het is handig om je boom op een nieuwe pagina te beginnen.*

## Opgave 3: Geheeltallige Programmering

Goudkoning Kesi Gouderse moet zijn kostbare lading goud in  $N$  etappes van Suriname naar de eindbestemming, een goudsmederij in China, vervoeren. Voor elke etappe heeft Gouderse de keuze uit  $M$  typen vervoer: vrachtwagen (1), trein (2), schip (3) etc.. Vervoersvorm  $i$  kost voor etappe  $j$  een bedrag  $v_{ij}$  [ $i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$ ] en bij elke etappe kan hij slechts gebruik maken van 1 type vervoer. In totaal is voor het vervoer een bedrag  $B$  beschikbaar. Verder is op etappe  $j$  met vervoersvorm  $i$  hoogstens een tonnage  $t_{ij}$  te vervoeren. Gouderse vraagt zich af **hoeveel** ton goud hij maximaal in één zending [welke dus bestaat uit  $N$  etappes] van Suriname naar China kan vervoeren. Ook wil hij weten **welke** vervoersvormen op de **verschillende** etappes gebruikt moeten worden. Verder zijn er nog de volgende bijvoorwaarden: Gouderse mag hoogstens  $K_i$  keer van vervoerstype  $i$  gebruikmaken [ $i = 1, \dots, M$ ], verder is het zo dat als je in een etappe gebruik maakt van vervoerstype 3, dat je dan niet van vervoerstype 4 gebruik mag maken in de overige etappes. Het omgekeerde geldt ook: als je gebruik maakt van vervoerstype 4, dan mag je geen gebruik maken van vervoerstype 3 in de overige etappes.

**Z.O.Z.**

**3A)** Formuleer dit probleem als een **gemengd** geheeltallig lineair programmeringsprobleem. ***Hint:** Introduceer zelf extra beslissingsvariabelen en gebruik onder andere de beslissingsvariabele:*

$w$  = minimale tonnage dat over een etappe vervoerd kan worden.

Gegeven zijn  $M$  toeleveringsbedrijven die elk hun eigen grondstof [zeg, bedrijf  $i$  levert grondstof  $i$ ] aanbieden. Per week kan bedrijf  $i$  maximaal een hoeveelheid  $B_i$  van grondstof  $i$  leveren [ $i = 1, \dots, M$ ]. Kasper is eigenaar van  $N$  fabrieken die elk hun eigen product maken uit de  $M$  verschillende grondstoffen. Voor het maken van één product  $j$  heeft fabriek  $j$  een hoeveelheid  $A_{ij}$  nodig van grondstof  $i$  [ $i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$ ].

De grondstoffen worden door een  $K$ -tal vrachtwagens van de toeleveringsbedrijven naar de fabrieken getransporteerd [ $K < M$ ]. De capaciteit van vrachtwagen  $k$  bedraagt  $G_k m^3$  [ $k = 1, \dots, K$ ] en één eenheid van grondstof  $i$  heeft een volume van  $g_i m^3$ . Gegeven is dat  $\sum_{k=1}^K G_k \gg \sum_{i=1}^M g_i B_i$  zodat in principe alle grondstoffen naar de fabrieken vervoerd zouden kunnen worden [het is natuurlijk niet gezegd dat dit ook moet!]. Om efficiency redenen vervoert elke vrachtwagen slechts een deelcollectie van de verschillende grondstoffen: als vrachtwagen  $k$  grondstof  $i$  vervoert, dan is vrachtwagen  $k$  de enige vrachtwagen die grondstof  $i$  vervoert en vervoert vrachtwagen  $k$  dus meteen de in totaal door de  $N$  fabrieken tezamen gevraagde hoeveelheid naar grondstof  $i$  en distribueert hij deze grondstof over de  $N$  fabrieken. Uiteraard kan een vrachtwagen meerdere grondstoffen vervoeren, maar als een vrachtwagen dus een bepaalde grondstof vervoert, dan vervoert hij meteen de totale vraag naar deze grondstoffen van alle  $N$  fabrieken tezamen. De transportkosten hangen niet alleen af van welke grondstoffen door een vrachtwagen worden vervoerd maar ook van de vervoerde hoeveelheden. Precies gezegd, vervoer van grondstof  $i$  door vrachtwagen  $k$  kost een vast bedrag  $\Delta_{ik}$  en verder een variabel bedrag  $\gamma_{ik}$  per eenheid vervoerde grondstof  $i$ . Aan het distribueren van de grondstoffen over de verschillende fabrieken zijn geen extra transportkosten verbonden, omdat elke vrachtwagen bij elke fabriek zijn vervoerde grondstoffen zal moeten afleveren [tenzij een fabriek een bepaalde grondstof in het geheel niet gebruikt, wat niet expliciet wordt uitgesloten].

Wel moet fabriek  $j$  voor elke eenheid van grondstof  $i$  een inkoopprijs  $C_{ij}$  betalen. De producten worden verkocht voor een bedrag  $Q_j$  per product  $j$  en de vraag naar de producten is onbeperkt. Het probleem van Kasper is het optimale transport- en productieschema te vinden waarmee een maximale nettowinst verkregen kan worden.

**3B)** Formuleer dit probleem als een **gemengd** geheeltallig lineair programmeringsprobleem. ***Hint:** begin met de criteriumfunctie en gebruik daarbij in ieder geval de volgende beslissingsvariabelen voor  $i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$  en  $k = 1, \dots, K$*

$x_{ij}$  = # eenheden van grondstof  $i$  dat per week wordt ingekocht door fabriek  $j$ .  
 $x_{ijk}$  = # eenheden van grondstof  $i$  dat per week wordt ingekocht door fabriek  $j$  en getransporteerd wordt door vrachtwagen  $k$ .  
 $z_j$  = # eenheden dat per week van product  $j$  geproduceerd wordt.

$y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{als grondstof } i \text{ vervoerd wordt door vrachtwagen } k; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$

**Z.O.Z.**

## Opgave 4: Dynamische Programmering

Een consortium van  $N$  makelaars wil een verzameling van  $M$  door de eigenaren aangeboden huizen onder elkaar verdelen voor het behartigen van hun belangen bij de verkoop. De door de eigenaren vastgestelde vraagprijs van huis  $i$  is  $p_i$  [ $i = 1, \dots, M$ ] en de afstand tussen het kantoor van makelaar  $j$  en huis  $i$  bedraagt  $a_{ij}$  [ $i = 1, 2, \dots, M; j = 1, \dots, N$ ]. Makelaar  $j$  wil in zijn verkoopportefeuille een collectie huizen opnemen waarvan de totale waarde minstens  $W_j$  bedraagt [ $j = 1, \dots, N$ ]. Om te voorkomen dat de ene makelaar een veel grotere afstand moet afleggen als hij met potentiële kopers de huizen gaat bezoeken dan de andere, wil men de huizen zodanig over de makelaars verdelen dat de grootste som van de afstanden tussen een makelaarskantoor en de aan dat makelaarskantoor toegewezen huizen zo klein mogelijk is.

**4A)** Formuleer dit probleem als een dynamisch programmeringsprobleem. Beschrijf daarvoor in ieder geval de toestand, de interpretatie van de waardefunctie in woorden, de recursierelatie, de start-recursie en wat je moet berekenen in termen van de waardefunctie. **Hint:** *Begin met stadium  $j$ .*

Nadat de makelaars de optimale toewijzing hebben kunnen aanschouwen blijken zij erg ontevreden te zijn. Zij klagen over te grote afstanden tussen de hun toegewezen huizen en hun kantoor. Daarom wordt elke makelaar gevraagd een bovengrens aan te geven voor de som van de afstanden tussen hun kantoor en de aan hen toe te wijzen huizen. Makelaar  $j$  geeft aan dat voor hem deze bovengrens  $T_j$  is [ $j = 1, 2, \dots, N$ ]. De vraag is nu natuurlijk wel volgens welk [nieuw] optimaliteitscriterium de huizen moeten worden toegewezen aan de makelaars. De makelaars komen met elkaar overeen dat de laagste totale waarde van een toegewezen collectie huizen zo groot mogelijk zal moeten zijn. De makelaars zien er daarmee vanaf dat zij een collectie met een vantevoren vastgestelde minimale waarde moeten krijgen toegewezen.

**4B)** Formuleer dit probleem als een dynamisch programmeringsprobleem. Beschrijf daarvoor in ieder geval de toestand, de interpretatie van de waardefunctie in woorden, de recursierelatie, de start-recursie en wat je moet berekenen in termen van de waardefunctie. **Hint:** *Begin met stadium  $j$ .*

**4C)** Beschrijf kort enkele voor- en nadelen van de twee verschillende criteria.

**-Einde Tentamen-**