

- **Maak alle opgaven.**
- Antwoorden zonder redenering scoren slecht dus geef overal goede redeneringen.
- Het gebruik van boeken, dictaten, aantekeningen en rekenmachines is *niet* toegestaan.
- Als je een onderdeel niet kunt doen dan mag je het resultaat ervan in de rest van de opgave toch gebruiken.

(1) Vind alle $x \in \mathbb{Z}$ die voldoen aan de twee voorwaarden

$$13x \equiv 1 \pmod{15}, \quad x^2 \equiv 9 \pmod{100}.$$

(2) Laat p en $q := 2p + 1$ priemgetallen zijn met $p \equiv 1 \pmod{5}$

(a) Laat zien dat

$$\left(\frac{5}{q}\right) = -1.$$

(b) Bewijs dat 5 een primitieve wortel modulo q is.

(3) Laat $x \in \mathbb{N}$ en laat p een priemdelers van $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ zijn.

(a) Bewijs dat $p = 5$ of $p \equiv 1 \pmod{5}$. (Hint: $(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1$.)

(b) Laat zien dat $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \not\equiv 0 \pmod{25}$.

(Hint: $x = 1 + 5k \Rightarrow x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 5(125k^4 + 125k^3 + 50k^2 + 10k + 1)$.)

(c) Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen p van de vorm $p \equiv 1 \pmod{5}$ zijn.

(4) Laat k een lichaam van karakteristiek 0 zijn en laat $n \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$.

(a) Bewijs: als polynomen $f, g, h \in k[x]$ voldoen aan

$$f^n + g^n = h^2, \quad \gcd(f, g, h) = 1$$

dan zijn f, g, h allemaal constant.

(b) Geef een expliciet voorbeeld van polynomen $f, g, h \in \mathbb{Q}[x] - \{0\}$ niet allemaal constant die voldoen aan

$$f^5 + g^5 = h^2.$$

(5) (a) Los de volgende Diophantische vergelijking op:

$$y^2 = x^3 + 7, \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

(Hint: tel aan beide zijden 1 op en factoriseer de rechterkant.)

(b) Laat zien dat $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ de enige oplossing is van de Diophantische vergelijking

$$x^3 - 5y^3 = 7z^3, \quad x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

(Hint: reken modulo een klein priemgetal.)

(c) Parametriseer alle rationale punten op de ellips gegeven door

$$x^2 + 2y^2 = 6.$$

Normering				
1: 10	2a: 6	3a: 8	4a: 12	5a: 10
	2b: 10	3b: 6	4b: 4	5b: 8
		3c: 8		5c: 8
Maximum totaal = 90				
Cijfer = 1 + Totaal/10				