

Tentamen Maat en integratietheorie

12 februari 2014, 18.30-21.15 uur

Het eindcijfer wordt bepaald door $(\text{aantal punten} + 3)/5$. (Er zijn 47 punten te behalen.)

Opgave 1. (a) (3 punten) Leg uit wanneer een verzameling $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue meetbaar is (in de oorspronkelijke definitie in termen van buitenmaten).
(b) (3 punten) Laat met behulp van de definitie in (a) zien dat de verzameling van irrationale getallen Lebesgue meetbaar is.
(c) (4 punten) Laat met behulp van de definitie in (a) zien dat wanneer E Lebesgue meetbaar is, $E + t = \{x + t; x \in E\}$ dat ook is.

Opgave 2. We beschouwen voor $x \in [0, 1]$ de binaire representatie van x , d.w.z., we schrijven x als

$$x = 0, a_1(x)a_2(x)a_3(x) \dots$$

waarbij $a_n(x) \in \{0, 1\}$ zodanig dat

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{2^n}.$$

(Voor sommige x bestaan er twee mogelijke binaire representaties, we kiezen dan een willekeurige.)

(a) (3 punten) Laat zien dat voor alle n de functie $a_n : x \rightarrow a_n(x)$ meetbaar is.

We definiëren nu een functie $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ door

$$f(x) = 0, a_2(x)a_3(x)a_4(x) \dots$$

(b) (3 punten) Laat zien dat f een meetbare functie is.

(c) (4 punten) Bereken $\int_{[0,1]} f dm$, waarbij m Lebesgue maat voorstelt.

Opgave 3. (a) (3 punten) Beschouw de collectie van deelverzamelingen A van $\mathbb{R}$ waarvoor A of A^c aftelbaar (of eindig) is. Laat zien dat deze collectie een sigma-algebra is.

(b) (2 punten) Beschouw de collectie van deelverzamelingen A van $\mathbb{R}$ waarvoor A of A^c eindig is. Is dit een sigma-algebra? Motiveer je antwoord.

Opgave 4. Beschouw het interval $[0, 1]$, en integreerbare functies $f_1, f_2, \dots$ van $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zodanig dat $f_n \rightarrow f$ en

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sup_n \int_{|f_n| \geq \alpha} |f_n| dm = 0.$$

- (a) (2 punten) Laat zien dat $\int |f_n| dm \leq \alpha + \int_{|f_n| \geq \alpha} |f_n| dm$.
- (b) (3 punten) Laat zien dat f integreerbaar is.

Opgave 5. Laat $\mu = \nu$ telmaat zijn op $X = Y = \{1, 2, 3, \dots\}$. Laat $f(x, y)$ een functie zijn van $X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) = 2 - 2^{-x}$ als $x = y$; $f(x, y) = -2 + 2^{-x}$ als $x = y + 1$, en $f(x, y) = 0$ elders.

- (a) (4 punten) Laat zien dat de herhaalde integralen

$$\int_X \int_Y f(x, y) d\nu d\mu \text{ and } \int_Y \int_X f(x, y) d\mu d\nu$$

allebei bestaan maar niet gelijk zijn.

- (b) (3 punten) Waarom is dit niet in tegenspraak met de stelling van Fubini?

Opgave 6. Tijdens het werkcollege hebben jullie laten zien dat wanneer μ en ν *eindige* maten zijn, $\nu \ll \mu$ dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor elke meetbare F met $\mu(F) < \delta$ geldt dat $\nu(F) < \epsilon$. Beschouw nu de ruimte $\mathbb{N}$ van positieve gehele getallen, met sigma-algebra gegeven door alle deelverzamelingen hiervan. Neem voor ν de telmaat, en voor μ de maat gegeven door $\mu(\{n\}) = n^{-2}$, $n = 1, 2, \dots$

- (a) (3 punten) Leg uit waarom μ hierdoor volledig is bepaald.
- (b) (3 punten) Laat zien dat $\nu \ll \mu$.
- (c) (4 punten) Laat nu zien dat de equivalentie die aan het begin van deze opgave werd beschreven, in dit geval niet geldt.