

Tentamen Maat en integratietheorie

19 december 2013, 8.45-11.30

Alle onderdelen tellen in principe even zwaar mee. Afwijkingen hiervan zullen slechts in je voordeel kunnen uitpakken. Wees nauwkeurig met je argumenten. Integralen zonder expliciet integratiegebied zijn altijd over de hele ruimte. Succes!

Opgave 1. Stel de functies $f_1, f_2, \dots$ van $\mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ zijn allemaal meetbaar en integreerbaar, en $f_n(x) \rightarrow f_0(x)$ als $n \rightarrow \infty$, voor alle x . Stel bovendien dat $\int f_n dm \rightarrow \int f_0 dm < \infty$ als $n \rightarrow \infty$.

- (a) Laat zien dat $(f_n - f_0)^- \leq f_0$.
- (b) Formuleer de gedomineerde convergentie stelling.
- (c) Laat zien dat $\int (f_n - f_0)^- dm \rightarrow 0$.
- (d) Laat zien dat $\int |f_n - f_0| dm \rightarrow 0$.

Opgave 2. Beschouw de functie $h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ gegeven door

$$h(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Je mag in deze opgaven de volgende Riemann integralen gebruiken:

$$\int_0^\infty ye^{-xy} dy = x^{-2}, \quad \int_0^\infty (1 - \cos x)e^{-xy} dx = 1/\{y(1 + y^2)\},$$

voor respectievelijk $x > 0$ en $y > 0$.

- (a) Laat met behulp van de stelling van Fubini zien dat de Lebesgue integraal $\int_{(0, \infty)} h(x) dm(x)$ gelijk is aan $\pi/2$.
- (b) Kun je op basis van (a) een conclusie trekken over de Riemann integraal $\int_0^\infty h(x) dx$?

Opgave 3. Voor elke meetbare verzameling $A \subset \mathbb{R}$, laat $c(A)$ het aantal elementen zijn van A .

- (a) Laat zien dat c een maat is op de Borelverzamelingen.
- (b) Laat zien dat $m \ll c$.
- (c) Laat zien dat er geen meetbare functie f bestaat met $m(A) = \int_A f dc$.
- (d) Leg uit waarom (c) niet in tegenspraak is met de stelling van Radon-Nikodym.

Opgave 4. Laat $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ meetbare en integreerbare functies zijn. We definiëren $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ als $h(x, y) = f(x)g(y)$.

- (a) Laat zien dat h meetbaar is met betrekking tot de product sigma-algebra en integreerbaar met betrekking tot $m \times m$.
- (b) Laat zien dat $\int h d(m \times m) = \int f dm \int g dm$.

Opgave 5. In deze opgave mag je gebruik maken van het feit dat twee maten op een σ -algebra hetzelfde zijn zodra ze gelijk zijn op een algebra die deze σ -algebra genereert.

- (a) Laat zien dat de collectie $\mathcal{A}$ die bestaat uit eindige verenigingen van intervallen, een algebra is.
- (b) Laat f en g meetbaar en niet-negatief zijn. Laat zien dat wanneer $\int_I f dm = \int_I g dm$ voor alle intervallen I , $f(x) = g(x)$ voor Lebesgue-bijna alle x .