

Tentamen Maat en Integratie

16 februari 2010; 18.30-21.15

Alle onderdelen tellen even zwaar mee in de beoordeling.

1. Beschouw Lebesgue maat m op $\mathbb{R}$. Voor $A \subset \mathbb{R}$ en $x \in \mathbb{R}$ schrijven we $x + A$ voor de verzameling $\{x + a; a \in A\}$.
 - (a) Beargumenteer dat $m(x + \mathbb{Q}) = 0$, voor alle $x \in \mathbb{R}$.
 - (b) Laat zien dat $m(\cup_{x \in \mathbb{R}}(x + \mathbb{Q})) = \infty$.
 - (c) Waarom is de combinatie van (a) en (b) niet strijdig met de subadditiviteit van m ?
2. We zeggen dat een sigma-algebra $\mathcal{A}$ *aftelbaar wordt voortgebracht* als er een aftelbare collectie verzamelingen $\mathcal{C}$ bestaat zodanig dat $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$. Laat zien dat de Borel sigma-algebra $\mathcal{B}$ op $\mathbb{R}$ aftelbaar wordt voortgebracht. Je kunt hierbij gebruik maken van het feit dat de Borel sigma-algebra wordt voortgebracht door de collecties die op het college zijn behandeld.
3. Laat μ_1 en μ_2 maten zijn op $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ en ν een maat op $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$. Stel dat $\mu_1 \perp \mu_2$. Laat zien dat $(\mu_1 \times \nu) \perp (\mu_2 \times \nu)$.
4. In deze opgave beschouwen we de functies $f_n(x) = x^n/n!$, $n = 0, 1, \dots$ en hun som

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

- (a) Leg uit (en wees heel precies met je argumenten) waarom geldt dat

$$\int_{(a,b)} f(x) dm(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(a,b)} f_n(x) dm(x).$$

- (b) Laat met een directe berekening zien dat de rechterkant van de laatste vergelijking gelijk is aan $f(b) - f(a)$.
5. (a) Formuleer de monotone convergentie stelling.
Beschouw een ruimte Ω met maat μ (op een zekere sigma-algebra). Laat, voor $n = 1, 2, \dots$ de functies $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integreerbaar zijn, z.d.d.

$$\sup_n \int_{\Omega} f_n d\mu < \infty.$$

(b) Gebruik de monotone convergentiestelling om te laten zien dat als $f_n \uparrow f$, dan is f integreerbaar en $\int_{\Omega} f_n d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f d\mu$. Wees heel precies met je argumenten.

6. Laat μ en ν twee maten op de Borel sigma-algebra in $\mathbb{R}$ zijn met Radon-Nikodym afgeleides respectievelijk f en g (met betrekking tot Lebesgue maat m). Definieer voor zekere $a \in \mathbb{R}$ de functies

$$F(x) = \mu(a, x] \text{ en } G(x) = \nu(a, x],$$

voor $x \geq a$. We definiëren ook de productmaat $\pi = \mu \times \nu$ en de verzameling $S = (a, b] \times (a, b]$.

(a) Laat zien dat $\pi(S) = F(b)G(b)$.

(b) Laat m.b.v. de stelling van Fubini zien dat voor $b > a$ geldt dat

$$\pi((x, y); a < y \leq x \leq b) = \int_{(a, b]} G(x) d\mu(x)$$

en dat

$$\pi((x, y); a < x \leq y \leq b) = \int_{(a, b]} F(y) d\nu(y).$$

(c) Leg uit waarom we de rechterkant van bovenstaande formules kunnen schrijven als $\int_{(a, b]} G(x) f(x) dm(x)$ respectievelijk $\int_{(a, b]} F(y) g(y) dm(y)$.

(d) Gebruik de stelling van Fubini om te laten zien dat $\pi((x, y); x = y) = 0$.

(e) Gebruik (a)-(d) om te laten zien dat

$$\int_{(a, b]} G(x) f(x) dm(x) = F(b)G(b) - \int_{(a, b]} F(x) g(x) dm(x).$$

(Dit is een speciaal geval van partieel integreren zoals jullie dat uit de calculus kennen.)