

Tentamen Maat en Integratie

20 oktober 2009; 15.15-17.15

Alle onderdelen tellen even zwaar mee in de beoordeling.

1. In deze opgave beschouwen we Lebesgue maat op $\mathbb{R}$.
 - (a) Geef de definitie van een nulverzameling.
 - (b) Laat A een nulverzameling zijn. Kan de verzameling $[0, 1] \setminus A$ een nulverzameling zijn? Motiveer je antwoord.
 - (c) Laat opnieuw A een nulverzameling zijn, en f een meetbare functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Laat door een voorbeeld zien dat $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \in A\}$ geen nulverzameling hoeft te zijn.
2. In deze opgave beschouwen we de Cantor verzameling C , die als volgt verkregen wordt. We beginnen met het interval $[0, 1]$, en verwijderen hieruit het middelste interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. De vereniging van de twee overgebleven intervallen noemen we C_1 , met andere woorden, $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Vervolgens verwijderen we uit elk van deze twee intervallen opnieuw het middelste interval, elk ter lengte $\frac{1}{9}$, en houden we dus vier intervallen over, elk weer ter lengte $\frac{1}{9}$. De vereniging van deze vier intervallen noemen we C_2 . Zo gaan we door, waarbij we achtereenvolgens de verzamelingen $C_3, C_4, \dots$ verkrijgen, elk bevat in zijn voorganger. De Cantorverzameling C is nu gedefinieerd als

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Tijdens het werkcollege hebben jullie al bewezen dat C een nulverzameling is. Dat gaan we nu weer doen, maar dan op een andere manier. Beschouw de verzameling $D_n = [0, 1] \setminus C_n$, voor $n = 1, 2, \dots$, en laat $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

- (a) Laat zien dat

$$[0, 1] \setminus C = D.$$

- (b) Laat zien, door D op een natuurlijke wijze te schrijven als vereniging van disjuncte (open) intervallen, dat $m(D) = 1$, waarbij m Lebesgue maat voorstelt.
 - (c) Leidt hieruit af dat $m(C) = 0$. (Wees heel precies met je argumenten.)
3. (a) Laat zien dat we, voor elke $\epsilon > 0$, de verzameling $\mathbb{Q}$ kunnen overdekken met aftelbaar veel open intervallen, z.d.d. de som van de lengtes van de overdekkende intervallen kleiner is dan ϵ .

Jullie hebben op het werkcollege bewezen dat voor elke $E \in \mathcal{M}$ het volgende waar is: voor elke $\epsilon > 0$ is er een gesloten verzameling $F \subset E$ met $m(E \setminus F) < \epsilon$. Neem nu het speciale geval dat $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dus E is de verzameling van alle irrationale getallen.

(b) Construeer, bij gegeven $\epsilon > 0$, een verzameling F die voldoet aan bovengenoemde eigenschap. Hierbij kun je gebruik maken van (a).

4. Bij gegeven sigma-algebra $\mathcal{F}$ noemen we een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ -meetbaar als $f^{-1}(I) \in \mathcal{F}$, voor elk interval I .

(a) Stel f en g zijn allebei $\mathcal{F}$ -meetbare functies, en $A \in \mathcal{F}$. Laat zien dat de functie h gegeven door $h(x) = g(x)$ als $x \in A$ en $h(x) = f(x)$ als $x \in A^c$ weer $\mathcal{F}$ -meetbaar is.

(b) Bestaat er een sigma-algebra $\mathcal{F}$ met de eigenschap dat de collectie van $\mathcal{F}$ -meetbare functies precies de collectie van alle continue functies is? Motiveer je antwoord.

5. Laat, zoals gewoonlijk, $\mathcal{M}$ de sigma-algebra van Lebesgue-meetbare verzamelingen zijn.

(a) Geef de definitie van een maat op $\mathcal{M}$.

Stel dat voor een zekere maat v op $\mathcal{M}$ gegeven is dat deze translatie-invariant is (d.w.z. dat $v(A) = v(A + t)$ voor elke meetbare A en $t \in \mathbb{R}$, waarbij $A + t$ de verzameling $\{x + t; x \in A\}$ voorstelt). Stel bovendien dat gegeven is dat $v((0, 1]) = 1$.

(b) Laat m.b.v. de translatie-invariantie van v en additiviteit zien dat voor elk interval $(a, a + n]$ ter lengte $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $v((a, a + n]) = n$.

(c) Laat m.b.v. (b) zien dat voor elk interval $(a, a + n/m]$ met rationale lengte n/m geldt dat $v((a, a + n/m]) = n/m$. (Hint: bedenk dat een bepaald aantal intervallen met dezelfde rationale lengte achter elkaar een interval met gehele lengte oplevert.)

We hebben nu de maat vastgelegd van alle intervallen van de vorm $(a, b]$ waarvan de lengte $b - a$ rationaal is. We gaan dit nu uitbreiden naar alle intervallen van deze vorm.

(d) Laat zien dat

$$(c, d] = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}, q > d - c} (c, c + q],$$

en gebruik de monotonie van de maat om te concluderen dat $v((c, d]) = d - c$ voor alle $c < d$.