

Opgave 4. Zij $(V, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte, en zij $g : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ een meetbare functie.

- (i). Geef een bewijs (in drie gebruikelijke stappen) van de *substitutie-regel* voor een *niet-negatieve* meetbare functie f op $\mathbb{R}_+$:

$$\int_V f \circ g \, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} f \, d\mu_g \quad [\mu_g := \text{beeldmaat van } \mu \text{ onder } g].$$

- (ii). Zij $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x > y\}$. Laat zien dat $C \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}_+^2)$ en (antwoord volstaat) dat $\mathcal{B}or(\mathbb{R}_+^2)$ een product- σ -algebra is, en bewijs dat voor $x \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}_+} 1_C(x, y) \, m(dy) = x \quad [m := \text{Borel-maat voor } \mathbb{R}_+].$$

- (iii). Neem voor f in (i) de identiteit, dus $f(x) = x$ voor $x \in \mathbb{R}_+$. Laat dan met behulp van (ii) zien dat onder een (zelf te bedenken) additionele voorwaarde ten aanzien van μ en g het volgende geldt:

$$\int_V g \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{g > y\}) \, dy.$$

Opgave 5. Beschouw in de bekende maatruimte $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^2), m_2)$ de halve strook

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y \geq 0\}.$$

- (i). Laat zien dat $C \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^2)$ op twee manieren: (a) met de definitie van $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^2)$; (b) door slechts gebruik te maken van het feit dat $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^2)$ de σ -algebra is voortgebracht door de cellen in $\mathbb{R}^2$.

Laat de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ op C gedefinieerd zijn door

$$f(x, y) := e^{-y} \sin 2xy \quad [(x, y) \in C].$$

- (ii). Laat zien dat f m_2 -integreerbaar is over C , en bepaal met behulp van het feit dat $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-y} \sin \alpha y \, dy = \alpha / (1 + \alpha^2)$ voor $\alpha \in \mathbb{R}$, de m_2 -integraal van f over C .

○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○

NORMERING:	1 (i): 2	2 (i): 1	3 (i): 2	4 (i): 3	5 (i): 2	TOTAAL:
	(ii): 1	(ii): 4	(ii): 2	(ii): 2	(ii): 4	38 punten!
	(iii): 2	(iii): 2	(iii): 2	(iii): 3		
	(iv): 1	(iv): 1				EINDCIJFER:
	(v): 2					$1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal.}$
	(vi): $\frac{2}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{6}$	

○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○ ○ ● * ★ * ★ * ● ○