

○●✱✱•✱✱●○•○●✱✱•✱✱●○•○●✱✱•✱✱●○•○●✱✱•✱✱●○•○●✱✱•✱✱●○•○●✱✱•✱✱●○•○●✱✱•✱✱●○•○●✱✱•✱✱●○

Opgave 1.

- (i). Zij $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ een rij niet-negatieve getallen met $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$, en zij $(r_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ de staartrij hierbij: $r_k := \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i$. Noteer met A de gf van (a_k) en met R die van (r_k) . Bewijs met ‘Fubini’ dat dan $R(z) = (1 - A(z))/(1 - z)$.

Beschouw de *vrije Bernoulli-wandeling* $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ (met $S_0 \equiv 0$) met parameter $p < \frac{1}{2}$. Zij, voor $r \in \mathbb{N}$, T_r het tijdstip van r -de terugkeer naar toestand 0, en noteer met $F^{(r)}$ de kgf van T_r . Zoals bekend wordt $F := F^{(1)}$ gegeven door $(q := 1 - p)$

$$F(z) = 1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}. \quad (*)$$

- (ii). Druk (zonder bewijs) $F^{(r)}$ uit in F , en bewijs met behulp hiervan en van (*) de bekende eigenschap dat T_r defectief is met $\mathbb{P}(T_r < \infty) = (2p)^r$.

Zij $N := \#\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$, dit is het *aantal bezoeken* van de wandeling *aan* 0.

- (iii). Laat met behulp van (ii) zien dat N niet-defectief is.
- (iv). Bepaal met behulp van (ii) $\mathbb{P}(N > k)$ voor $k \in \mathbb{Z}_+$, laat hiermee zien dat de g.f R van de rij $(\mathbb{P}(N > k))_{k \in \mathbb{Z}_+}$ gegeven wordt door $R(z) = 2p/(1 - 2pz)$, en bepaal vervolgens met behulp van (i) de kgf van N , en daarmee de kansverdeling van N . Hoe wordt deze verdeling wel genoemd?
- (v). Bepaal $\mathbb{P}(S_n \neq 0 \text{ voor alle } n \in \mathbb{N})$.

Opgave 2. Zij $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de *vrije Bernoulli-wandeling* (met $S_0 \equiv 0$) met parameter p ; noteer $q := 1 - p$. We willen voor $n \in \mathbb{N}$ de *fluctuatiekans* α_n gedefinieerd door

$$\alpha_n := \mathbb{P}(S_1 \leq 0; \cdots; S_n \leq 0),$$

uitdrukken in de (bekende) verdeling (f_i) van de terugkeertijd τ van toestand 0.

- (i). Bepaal α_3 . Waarom is $\alpha_4 = \alpha_3$?
- (ii). Bewijs door middel van een *combinatorische methode* dat

$$f_{k+1} = 2 \mathbb{P}(S_1 < 0; \cdots; S_k < 0; S_{k+1} = 0) \quad [k \in \mathbb{N}],$$

laat hiermee zien dat, met I_1 de intreetijd van toestand 1,

$$f_{k+1} = 2q \mathbb{P}(I_1 = k) \quad [k \in \mathbb{N}],$$

en concludeer vervolgens dat α_n gegeven wordt door

$$\alpha_n = 1 - \frac{1}{2q} \sum_{i=1}^{n+1} f_i.$$

- (iii). Beschouw $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$. Geef, in termen van (S_n) , een eventualiteit A met $\alpha = \mathbb{P}(A)$, en bepaal α met behulp van (ii) en een bekende eigenschap van τ .
- (iv). Zij $p = \frac{1}{2}$; zoals bekend is dan $f_i = u_{i-2} - u_i$ voor $i \geq 2$, met $u_k := \mathbb{P}(S_k = 0)$. Laat nu met behulp hiervan en van (ii) zien dat en hoe α_n uitgedrukt kan worden in de rij (u_k) , en controleer met het resultaat de in (i) gevonden waarde van α_3 en de in (iii) gevonden waarde van α (voor $p = \frac{1}{2}$).

Opgave 3. Zij $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandsruimte I , startverdeling $a = (a_i)_{i \in I}$, en overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$. Zij τ_j de intreetijd van toestand j .

- (i). Zoals bekend, geeft de zuivere vernieuwingsvergelijking voor $j \in I$ een verband tussen de rij $(p_{jj}^{(n)})$ van n -stapsovergangskansen van j naar j (met $p_{jj}^{(0)} := 1$) en de terugkeerverdeling $(f_{jj}^{(n)})$ van τ_j . Geef dit verband en een (kort, direct) bewijs ervan, en herformuleer de vergelijking in termen van gf's.

Laat verder $I = \{0, 1\}$ en $\mathcal{P}$ bepaald zijn door $p_{01} = \frac{1}{2}$ en $p_{10} = \frac{1}{4}$.

- (ii). Geef het bij $\mathcal{P}$ behorende 1-stapsschema, bepaal de terugkeerverdeling $(f_{00}^{(n)})$ van τ_0 , en laat zien dat de gf hiervan gegeven wordt door

$$F_{00}(z) = \frac{z(2-z)}{4-3z}.$$

Hoe kunnen we hieraan direct zien dat 0 *recurrent* is?

- (iii). Bepaal met behulp van (i) en (ii) de n -stapsovergangskans $p_{00}^{(n)}$ voor $n \in \mathbb{Z}_+$. Wat is $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{00}^{(n)}$, en hoe kunnen we ook hieraan direct zien dat 0 *recurrent* is?

Laat de startverdeling a gegeven zijn door de (rij-) vector $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

- (iv). Bepaal de $\mathbb{P}_a$ -verdeling $(p_{aj})_{j \in I}$ van X_1 .
 (v). Bepaal de $\mathbb{P}_a$ -verdeling $(f_{a0}^{(n)})$ van τ_0 . Wat is $f_{a0} := \mathbb{P}_a(\tau_0 < \infty)$?

○ ● * ★ • * * ● ○ • ○ ● * ★ * * * ● ○ • ○ ● * ★ * * * ● ○ • ○ ● * ★ * * * ● ○ • ○ ● * ★ * * * ● ○ • ○ ● * ★ * * * ● ○

NORMERING: 1 (i): 2 2 (i): 1 3 (i): 3 TOTAAL: 31 punten!

 (ii): 2 (ii): 4 (ii): 3

 (iii): 1 (iii): 2 (iii): 3 EINDCIJFER:

 (iv): 3 (iv): 2 (iv): 1 $\frac{1}{3} \times \text{totaal.}$

 (v): $\frac{1}{9}$ (v): $\frac{3}{13}$

○ ● * ★ • * * ● ○ • ○ ● * ★ * * * ● ○ • ○ ● * ★ * * * ● ○ • ○ ● * ★ * * * ● ○ • ○ ● * ★ * * * ● ○